M.V. MEEROV

BAZELE REGLĂRII AUTOMATE A MAȘINILOR ELECTRICE

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

EDITURA ENERGETICĂ DE STAT

In această carte sunt expuse bazele teoriei reglării automate aplicabile la reglarea maşinilor electrice.

Cartea se adresează colaboratorilor ştiinţifici şi inginerilor care lucrează în domeniul reglării automate. Deasemenea, cartea poate fi folositoare aspiranţilor şi studenţilor care se specializează în acest domeniu.

М. В. МЕЕРОВ

ОСНОВЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Госэнергоиздат

Москва 1952 Ленинград

PREFAŢĂ

Reglarea automată este astăzi larg utilizată în diferite domenii tehnice şi industriale. Acest fapt a dus la necesitatea elaborării unor metode practice de studiere a sistemelor de reglare şi de alegere a parametrilor fundamentali, pentru a se realiza astfel, în modul cel mai simplu, toate condiţiile tehnice de funcţionare a acestor sisteme. Teoria reglării automate are de scop rezolvarea acestor probleme.

Teoria clasică a reglării automate, al cărei fondator este I. A. Vâşnegradschi, a fost continuată şi desvoltată în lucrările savanţilor ruşi şi sovietici. Un aport considerabil în acest domeniu a fost adus prin lucrările academicianului A. A. Andronov, ale lui I. N. Vosnesenschi, membru corespondent al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. şi ale continuatorilor acestora, precum şi ale lui A. V. Mihailov, creatorul metodei de reglare a maşinilor electrice prin frecvenţă, metodă care se încadrează în teoria generală a reglării. In reglarea maşinilor electrice, sunt deosebit de importante problemele variaţiei excitaţiei acestora, ale cărei principii teoretice au fost elaborate de academicianul V. S. Culebachin. Aceste lucrări stau la baza teoriei moderne a reglării automate.

Teoria modernă a reglării permite să se realizeze o alegere corectă a schemelor şi să aprecieze influenţa pe care o exercită diferiţii parametri asupra stabilităţii şi a altor caracteristici ale sistemului de reglare. La rezolvarea practică a diferitelor probleme, nu sunt însă întotdeauna folosite rezultatele obţinute de teoria modernă a reglării. După părerea autorului, acest lucru se datoreşte faptului că cea mai mare parte dintre lucrările teoretice asupra reglării automate, publicate în diverse reviste periodice, sunt foarte greu accesibile cercurilor largi de ingineri şi tehnicieni, din cauza complexităţii relaţiilor matematice folosite

în expunerile respective, complexitatea problemei obligând pe autori să recurgă la o serie de relații matematice care depășesc nivelul cursurilor de matematici predate la institutele tehnice superioare.

In cartea de față, autorul încearcă să expună teoria reglării liniare a sistemelor cu comandă continuă într'o formă accesibilă cercurilor largi de ingineri și tehnicieni. Autorul consideră că această problemă poate fi rezolvată dacă principiile teoretice ale reglării automate vor fi expuse concret, pe o serie de cazuri reale.

Dintre utilajele reglabile este examinat motorul electric, la care se poate regla viteza unghiulară sau viteza de rotație și generatorul electric, la care se poate regla tensiunea.

Teoria reglării automate moderne prezintă o mare importanță în rezolvarea problemelor de automatizare a dispozitivelor de acționare electrică. Aceasta se referă, în primul rând, la dispozitivele de transmitere a comenzilor. Pentru a se mări precizia de stabilitate, se recurge la mărirea factorului de amplificare, ceeace poate duce la instabilitate. La reglarea unghiului de divergență, este foarte important, de cele mai multe ori, să nu se admită dereglări sau oscilații prelungite. Astfel de probleme nu se pun numai la dispozitivele de transmitere a comenzilor.

Sistemele moderne de dispozitive electrice de acționare automatizate, execută, în afara comenzilor de pornire, frânare și schimbare a sensului mișcării, și reglarea automată a unui șir întreg de mărimi. Astfel, de exemplu, în sistemul de comandă a motoarelor unui laminor reversibil, în cazul acționării separate a valțurilor, este necesar să se mențină, în mod automat, și o viteză liniară constantă la suprafața lor. In cazul laminării la rece, ca și în alte regimuri, acest sistem trebue să asigure reglarea automată a platbenzii (țaglei) metalice, pentru ca aceasta să fie întinsă permanent și să avanseze cu o precizie suficient de mare. Caracteristice pentru aceste sisteme sunt factorul de amplificare și variația continuă a cuplului de sarcină. Numărul exemplelor din acest domeniu poate fi oricât de mare. Rezolvarea acestor probleme este strâns legată de analiza proprietăților dinamice ale sistemelor închise, cuprinsă în teoria reglării automate.

Problemele reglării automate a dispozitivelor de acționare electrică au devenit deosebit de actuale, datorită automatizării mașinilor electrice și desvoltării sistemelor de comandă continuă

și a sistemelor care funcționează după principiul circuitului închis.

Atât cercetătorului cât și inginerului proiectant, care se ocupă cu problema dispozitivelor de acționare electrică automatizate, li se pun, din ce în ce mai mult, probleme a căror rezolvare poate fi ușurată prin folosirea metodelor moderne de reglare automată. Dintre aceste probleme citâm, în primul rând, următoarele:

a) alegerea structurii sistemului de reglare automată;

b) studiul stabilității și calității procesului de reglare automată;

c) alegerea parametrilor principali ai sistemului, în vederea asigurării unei anumite desfășurări a procesului de reglare.

Din cele expuse rezultă marea importanță pe care o prezintă, pentru dispozitivele automatizate de acționare electrică, aceste probleme, a căror rezolvare este dată în teoria reglării automate. Deși cartea de față nu poate să cuprindă în întregime problemele amintite mai sus, autorul speră că ea va contribui la rezolvarea acestor probleme.

Volumul redus al cărții nu a permis să se includă studiul fenomenelor tranzitorii în raport cu natura rădăcinilor ecuației caracteristice sau prin integrale.

Autorul va fi recunoscător tuturor celor care îi vor comunica observațiile lor asupra conținutului cărții și a metodei de expunere a materialului prezentat.

M. MEEROV

INTRODUCERE

Particularitățile sistemelor de reglare automată pot fi explicate în modul cel mai simplu cu ajutorul unui exemplu concret. Fie un generator de curent continuu cu excitație separată, G care se rotește cu o viteză constantă și alimentează receptorul R_s (fig. I-1). Se cere ca tensiunea generatorului să fie menținută automat constantă, independent de valoarea

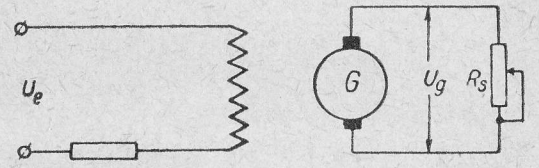


Fig. I—1. Schema generatorului de curent continuu cu excitație separată.

sarcinii. Dacă tensiunea de excitație și rezistența circuitului de excitație al generatorului rămân constante, atunci după cum se știe din teoria mașinilor electrice, la o variație a sarcinii, tensiunea U_g a generatorului va varia după o curbă, numită caracteristica externă a generatorului (fig. I-2).

Presupunem că mașina funcționează într'un regim corespunzător punctului M de pe caracteristica externă, având, în acest caz, tensiunea U_s și curentul de încărcare I_s (fig. I-2). Presupunem apoi că, datorită variației rezistenței R_s, curentul de încărcare își schimbă valoarea, devenind egal cu I_1. Acestui curent îi corespunde, pe caracteristica externă, tensiunea U_1, a cărei valoare este mai mică decât tensiunea inițială U_s. Pentru a putea mări tensiunea generatorului până la valoarea U_s, la noua încărcare I_1, este necesar ca mașina să funcționeze

cu o altă caracteristică externă (notată în fig. I-2 cu cifra 2). Această caracteristică corespunde unei alte valori a curentului de excitație și poate fi obținută fie prin variația rezistenței din circuitul de excitație al generatorului, fie prin variația corespunzătoare a tensiunii de excitație.

Pentru a se putea menține în mod automat constantă tensiunea generatorului, trebue să se realizeze un sistem care, la variațiile tensiunii U_g, să determine variația curentului de

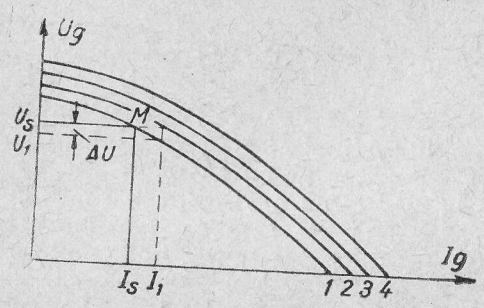


Fig. I—2. Familie de caracteristici externe ale generatorului cu excitație separată.

excitație și, prin aceasta, să efectueze trecerea mașinii pe caracteristica externă corespunzătoare sarcinii date.

Să legăm la barele generatorului un element care să măsoare în mod permanent mărimea reglabilă și s'o compare cu o valoare dată. In cele ce urmează vom denumi organul care îndeplinește această funcție element de măsurare.

In cazul exemplului considerat, în care tensiunea generatorului este o mărime reglabilă, se poate utiliza ca element de măsurare solenoidul S, prevăzut cu un arc F (fig. I-3). Asupra armăturii solenoidului acționează o forță electromagnetică proporțională cu mărimea reglabilă. In cazul de față, această forță acționează în sus, tinzând să atragă armătura solenoidului. Acestei forțe i se opune arcul, al cărui efort este dirijat în jos (arcul este solicitat la întindere).

Intr'un regim normal de funcționare, pentru o anumită valoare a tensiunii, efortul electromagnetic al solenoidului este echilibrat de forța de reacțiune a arcului, iar armătura solenoidului rămâne fixă. La o variație a sarcinii, tensiunea generatorului variază deasemenea, ceeace determină variația efor-

tului electromagnetic al solenoidului. Ca urmare a acestui fapt, se distruge echilibrul armăturii, care se va pune în mișcare. Sistemul se va echilibra când armătura se va stabili într'o altă poziție. In felul acesta, orice variație a tensiunii, față de valoarea propusă, duce inerent la schimbarea poziției armăturii solenoidului.

Liniaritatea elementului de măsurare presupune o relație proporțională univocă între mărimea variației tensiunii în

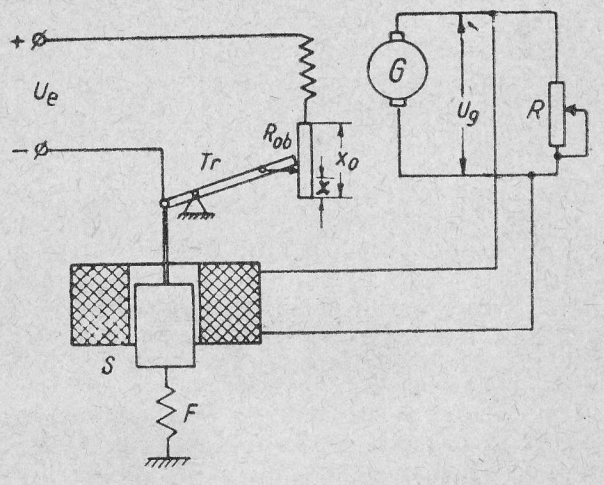


Fig. I—3. Schemă de principiu pentru reglarea tensiunii unui generator de curent continuu.

raport cu o valoare dată și mărimea cu care s'a deplasat armătura solenoidului față de poziția sa de repaus. Pentru a se restabili valoarea tensiunii date, trebue să fie modificată în mod corespunzător valoarea curentului de excitație a generatorului. Acesta se poate realiza prin legarea armăturii solenoidului cu elementul de reglare a sistemului, în așa fel încât deplasarea armăturii să producă variația necesară de curent în circuitul de excitație al generatorului. Un astfel de element poartă denumirea de organ de reglare. In exemplul reprezentat în fig. I-3, pârghia Tr îndeplinește funcția unui organ de reglare; prin deplasarea ei se schimbă valoarea rezistenței în circuitul de excitație al generatorului.

Obiectul reglării R_{ob}, elementul de măsurare S şi organul de reglare Tr trebue să facă parte din orice sistem de reglare automată şi este suficient ca unul dintre aceste elemente, să lipsească, pentru ca sistemul să înceteze de a mai fi un sistem de reglare automată. Deaceea, vom numi cele trei elemente menţionate, elementele de bază sau principale ale sistemului de reglare automată.

De cele mai multe ori, eforturile produse de elementul de măsurare sunt insuficiente pentru a pune în funcţiune organul de reglare. In acest caz, între elementul de măsurare şi organul de reglare se intercalează un amplificator. Astfel de sisteme se numesc sisteme cu acţiune indirectă.

Trebue să atragem atenţia asupra unei caracteristici importante a sistemului de reglare studiat, caracteristică ce apare în oricare sistem de reglare automată. Este uşor de constatat că se formează un circuit închis de acţiune-reacţiune. Intr'adevăr, variaţia mărimii reglabile (tensiunea generatorului) determină micşorarea elementului de măsurare (armătura solenoidului); acesta din urmă, deplasându-se, pune în mişcare organul de reglare (pârghia Tr); schimbarea poziţiei organului de reglare, la rândul ei, modifică valoarea mărimii reglabile, închizând circuitul de acţiune-reacţiune. Sistemele de reglare automată sunt, deci, sisteme care funcţionează după un ciclu închis.

Elementele sistemului de reglare automată au deobicei proprietatea că, în cazul conectării lor în serie, elementul următor din circuitul de acţiune-reacţiune exercită o influenţă infinit mică asupra elementului anterior. Această influenţă inversă a elementelor din ciclul de reglare este deobicei neglijabilă, acţiunea lor fiind considerată unidirecţională.

Astfel, în cazul de faţă, solenoidul nu exercită o influenţă directă asupra generatorului.

Pentru a se putea studia un sistem de reglare automată trebue, înainte de toate, să se studieze proprietăţile elementelor din care este format un asemenea sistem.

CAPITOLUL I

ELEMENTELE DE BAZĂ ALE SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

1—1. OBIECTELE DE REGLARE

Ca un prim exemplu de studiere a sistemelor de reglare, să examinăm generatorul de curent continuu cu excitaţie separată. In acest caz, tensiunea la bornele rotorului este o mărime reglabilă.

Reglarea tensiunii la bornele rotorului generatorului se realizează prin variaţia curentului de excitaţie; aceasta se obţine, la rândul ei, prin variaţia tensiunii la bornele înfăşurării de excitaţie.

Pentru ca expunerea ulterioară să fie mai concretă, vom introduce câteva noţiuni folosite astăzi pe scară largă în teoria modernă a reglării automate. Vom denumi mărimea care acţionează la intrarea elementului dat, mărime de intrare, şi, respectiv, cea dela ieşire, mărime de ieşire. Pentru cazul considerat, mărimea de intrare va fi tensiunea de excitaţie, iar mărimea de ieşire, tensiunea la bornele rotorului.

Proprietăţile elementului din ciclul de reglare vor fi în întregime determinate prin relaţia care leagă, în orice moment, mărimea de ieşire de mărimea de intrare. In general, această relaţie este exprimată printr'o ecuaţie diferenţială. Să determinăm relaţia dintre mărimile de intrare şi de ieşire, în cazul când se reglează tensiunea dela bornele rotorului generatorului de curent continuu cu excitaţie separată.

Admitem că tensiunea de excitaţie variază în timp după legea:

$$u_e = u_e\,(t).$$

Notăm inductanța și rezistența din circuitul de excitație al generatorului, respectiv, cu L și R. Ecuația de funcționare a circuitului de excitație se va scrie:

$$L\frac{di_e}{dt} + Ri_e = u_e(t), \qquad (1\text{-}1)$$

în care i_e este curentul din circuitul de excitație.

Notăm operația de diferențiere $\frac{d}{dt}$ cu simbolul p.

In acest caz, ecuația (1—1) devine:

$$Lpi_e + Ri_e = u_e(t). \qquad (1-2)$$

Cu simbolul p se pot efectua, în anumite condiții, toate operațiile ca și cu numerele algebrice, fapt care ușurează considerabil stabilirea ecuației caracteristice a sistemului sau a diferitelor elemente[1]).

Dând factor comun pe i_e în ecuația (1—2), aceasta se poate scrie:

$$(Lp + R)i_e = u_e(t). \qquad (1-3)$$

Pentru porțiunea liniară a curbei de magnetizare, tensiunea la bornele rotorului generatorului poate fi scrisă:

$$u_g = K'i_e, \qquad (1-4)$$

în care $K' = \operatorname{tg}\alpha$ este coeficientul unghiular al tangentei în origine la curba de magnetizare (fig. 1—1).

Eliminând curentul i_e între (1—3) și (1—4), se obține:

$$(R + Lp)u_g(t) = K'u_e(t). \qquad (1-5)$$

Impărțind ecuația (1—5) prin R și notând $\frac{L}{R} = T$ și $\frac{K'}{R} = K$, se obține:

$$(1 + Tp)u_g(t) = Ku_e(t)$$

sau

$$\frac{u_g(t)}{u_e(t)} = \frac{K}{1+Tp}. \qquad (1-6)$$

[1]) In cazurile când aceste operații cu p nu vor fi posibile, se vor da explicațiile respective.

Numim ecuația (1—6), ecuația operațională a obiectului de reglare studiat.

In această ecuație, mărimea T reprezintă un timp și se numește *constantă de timp*, iar K se numește *factor de amplificare a elementului* dat din sistem și se determină prin raportul dintre mărimea de intrare și cea de ieșire, în regimul stabilizat.

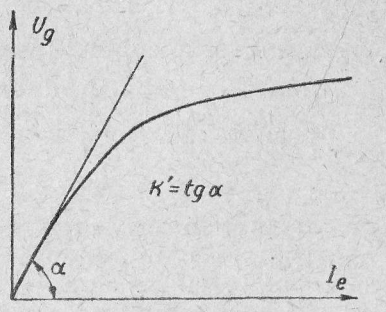


Fig. 1—1. Caracteristica de mers în gol a generatorului.

Să examinăm acum, ca obiect de reglare, un electromotor de curent continuu cu excitație separată, a cărui viteză se reglează prin variația tensiunii aplicate rotorului, pentru o anumită excitație constantă.

In acest caz, mărimea de intrare a elementului studiat va fi tensiunea u aplicată la bornele rotorului motorului, iar mărimea de ieșire, viteza n a acestuia. Să găsim legătura dintre aceste două mărimi, stabilind ecuația operațională a motorului.

Ecuația echilibrului dinamic al motorului, după cum se știe, poate fi pusă sub forma:

$$\frac{GD^2}{375}pn = M_m - M_r, \qquad (1-7)$$

în care GD^2 este momentul de volan al părților aflate în rotație;

M_m — cuplul motor;
M_r — cuplul rezistent.

Cuplul motor se exprimă prin ecuația:

$$M_m = C_m \Phi i_r \qquad (1-8)$$

unde C_m este o constantă;
Φ — fluxul magnetic al motorului (în cazul de față constant);
i_r — curentul din rotorul motorului.

Cuplul rezistent depinde, pentru fiecare caz în parte, de condițiile de funcționare ale motorului. Este deci rațional să

existe o ecuație care să caracterizeze proprietățile motorului, presupunând că $M_r = 0$. Cuplul rezistent va fi determinat separat pentru fiecare caz concret, cu ajutorul unei ecuații numite ecuația de mers în sarcină.

In aceste condiții, ținând seama de ecuația (1—8), ecuația (1—7) se va scrie :

$$\frac{GD^2}{375} pn = C_m \Phi i_r. \qquad (1—9)$$

Ecuația de funcționare a circuitului rotoric, în acest caz, este :

$$u = e + L_r p i_r + R_r i_r; \qquad (1—10)$$

în care u este tensiunea dela bornele rotorului motorului ;

e — f.e.m. indusă în rotorul motorului ;

L_r și R_r sunt, respectiv, inductanța și rezistența circuitului rotoric al motorului.

Forța contraelectromotoare a motorului poate fi exprimată în funcție de flux și viteza de rotație, prin relația :

$$e = C_e \Phi n, \qquad (1—11)$$

unde C_e este o constantă ;

n — viteza de rotație a motorului.

Eliminând curentul i_r din ecuațiile (1—9) și (1—10) și ținând seama de ecuația (1—11), se obține ecuația operațională a motorului :

$$(T_m T_r p^2 + T_m p + 1)n = Ku, \qquad (1—12)$$

în care $T_m = \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{R_r}{C_m C_e \Phi^2}$ este constanta de timp electromecanică a motorului, care se exprimă în unități de timp ;

$T_1 = \frac{L_r}{R_r}$ — constanta de timp a circuitului rotorului motorului ;

$K = \frac{1}{C_c \Phi}$ — factorul de amplificare, care reprezintă raportul dintre mărimea stabilizată n a vitezei de rotație și mărimea de intrare u.

Ecuația (1—12) ne dă relația căutată între mărimea de ieșire, adică viteza de rotație a motorului, și mărimea de intrare, adică tensiunea aplicată rotorului. De cele mai multe ori, ecuația operațională se determină prin raportul dintre mărimile de ieșire și de intrare și are forma :

$$\frac{n}{u} = \frac{K}{T_m T_r p^2 + T_m p + 1}. \qquad (1—13)$$

Să considerăm acum ca mărime de ieșire unghiul de rotație al arborelui motorului, în locul vitezei acestuia. In acest caz, ținând seama că :

$$n = p\varphi, \qquad (1—14)$$

ecuația (1—12) se va scrie :

$$(T_m T_r p^2 + T_m p + 1)p\varphi = Ku \qquad (1—15)$$

sau

$$\frac{\varphi}{u} = \frac{K}{(T_m T_r p^2 + T_m p + 1)p}, \qquad (1—16)$$

în care φ este unghiul de rotație al arborelui motorului.

Dacă se neglijează constanta de timp a circuitului rotorului motorului, adică se consideră $T_r = 0$, se obține :

$$\frac{n}{u} = \frac{K}{T_m p + 1} \qquad (1—17)$$

sau

$$\frac{\varphi}{u} = \frac{K}{(T_m p + 1)p}. \qquad (1—17')$$

Relațiile obținute sunt tocmai ecuațiile operaționale ale motorului în cazul condițiilor corespunzătoare.

Să determinăm acum ecuațiile operaționale ale motorului în cazul reglării vitezei acestuia prin variația fluxului de excitație. Să presupunem că tensiunea rotorului rămâne, în acest caz, constantă.

Ecuația echilibrului dinamic se va scrie la fel ca în cazul reglării prin variația tensiunii rotorului :

$$\frac{GD^2}{375} pn = C_m \Phi i_r.$$

Spre deosebire de cazul studiat mai sus, în cazul de față fluxul este o mărime variabilă. Curentul din rotor, în cazul regimului tranzitoriu, este deasemenea o mărime variabilă.

Deaceea, chiar dacă caracteristica de magnetizare a motorului este rectilinie, ecuația (1—9) nu va mai fi liniară, întrucât în această ecuație intră produsul celor două variabile Φ și i_r.

Studiul sistemelor neliniare depășește cadrul prezentei cărți. In cazul de față, vom folosi procedee cunoscute care permit, în anumite condiții, să se obțină o ecuație aproximativ liniară.

Presupunem că într'un anumit regim permanent fluxul are valoarea Φ_0, curentul din rotor are valoarea I_{ro}, iar viteza este n_0. Presupunem apoi că, la un moment dat, tensiunea de excitație u_e s'a modificat cu o valoare mică Δu_e, în urma cărui fapt fluxul și-a schimbat valoarea cu $\Delta\Phi$, iar curentul din rotor, cu Δi_r. Ecuația echilibrului dinamic va căpăta, în acest caz, următoarea formă :

$$\frac{GD^2}{375} p(n_0 + \Delta n) = C_m(\Phi_0 + \Delta\Phi)(I_{ro} + \Delta i_r) =$$
$$= C_m\Phi_0 I_{ro} + C_m\Phi_0\Delta i_r + C_m I_{ro}\Delta\Phi + C_m\Delta\Phi\,\Delta i_r.$$

Ținând seama de faptul că $C_m\Phi_0 I_{ro}$ este cuplul care compensează pierderile în regimul permanent și neglijând variația mică de ordinul doi ($C_m\Delta\Phi\Delta i_r \approx 0$), se obține o ecuație aproximativ liniară, de forma :

$$\frac{GD^2}{375} p\Delta n = C_m\Phi_0\Delta i_r + C_m I_{ro}\Delta\Phi\,. \qquad (1—18)$$

Se determină creșterea de curent Δi_r și creșterea de flux $\Delta\Phi$.

In cazul când tensiunea aplicată rotorului este constantă, variația Δi_r a curentului se datorează variației f.e..m. a rotorului motorului, din cauza variației de viteză Δn a acestuia și de flux $\Delta\Phi$. Variația curentului poate fi deci determinată prin ecuația :

$$\Delta i_r = -\frac{C_e\Phi_0\Delta n + C_e n_0\,\Delta\Phi}{L_r p + R_r}\,. \qquad (1—19)$$

Variația $\Delta\Phi$ a fluxului se produce din cauza variației Δu_e a tensiunii de excitație, și cum

$$\Delta u_e = R_e\Delta i_e + L_e p\Delta i_e,$$

rezultă

$$\Delta\Phi = C\Delta i_e = \frac{C\Delta u_e}{L_e p + R_e}\,; \qquad (1—20)$$

în această relație, C este un coeficient care depinde de constituția circuitului magnetic al motorului, de calitatea materialului feros și de numărul de spire ale înfășurării de excitație. Se admite că, pentru un anumit motor, C este o mărime constantă.

Inlocuind valorile Δi_r și $\Delta\Phi$ din (1—19) și (1—20) în (1—18), se obține :

$$\frac{GD^2}{375} p(L_r p + R_r)(L_e p + R_e)\Delta n + C_m C_e\Phi_0^2 \cdot (L_e p + R_e)\Delta n =$$
$$= [C_m I_{ro} C(L_r p + R_r) - C_m C_e\Phi_0 n_0 C]\Delta u_e.$$

Introducem notațiile :

$\frac{L_e}{R_e} = T_e$ — constanta de timp a circuitului de excitație a motorului ;

$\frac{L_r}{R_r} = T$ — constanta de timp a circuitului rotorului motorului ;

$\frac{GD^2}{375}\,\frac{R_r}{C_m C_e\Phi_0^2} = T_m$ — constanta de timp electromecanică a motorului ;

$\frac{R_r}{R_e}\,\frac{C}{Ce}\,\frac{I_{ro}}{\Phi_0^2} = K$ — factorul de amplificare.

După o serie de transformări simple, se obține următoarea ecuație operațională a motorului, pentru cazul când viteza acestuia se reglează prin acționare asupra fluxului de excitație :

$$(T_e p + 1)(T_m T_r p^2 + T_m p + 1)\Delta n = K(1 + T_r p)\Delta u_e - \frac{n_0 C}{\Phi_0 R_e}\Delta u_e$$

sau

$$\frac{\Delta n}{\Delta u_e} = \frac{K(1 + T_r p) - \dfrac{Cn_0}{\Phi_0 R_e}}{(T_m T_r p^2 + T_m p + 1)(T_e p + 1)}\,. \qquad (1—21)$$

Dacă se reglează unghiul de rotație al arborelui, ținând seama de relația (1—14), se obține următoarea ecuație operațională :

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta u_e} = \frac{K(1 + T_r p) - \dfrac{Cn_0}{\Phi_0 R_e}}{(1 + T_e p)(T_m T_r p^2 + T_m p + 1)p}\,. \qquad (1—22)$$

Dacă se neglijează constanta de timp T_r, a circuitului rotorului, ecuațiile operaționale (1—21) și (1—22) devin

$$\frac{\Delta n}{\Delta u_e} = \frac{K - \dfrac{Cn_0}{\Phi_0 R_e}}{(1+T_e p)(1+T_m p)}$$

și

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta u_e} = \frac{K - \dfrac{Cn_0}{\Phi_0 R_e}}{(1+T_e p)(1+T_m p)\, p}.$$

Din compararea ecuațiilor obținute, în cazurile când reglarea se efectuează prin acționare asupra tensiunii rotorului sau prin acționare asupra fluxului de excitație a motorului, se constată că, în ultimul caz, ecuația operațională a motorului este mult mai complicată.

Aceasta se datorează faptului că în ultimul caz trebue să fie luate în considerație nu numai fenomenele tranzitorii mecanice și electrice din circuitul rotoric al motorului, ci și fenomenele tranzitorii electrice din circuitul înfășurării de excitație. Inafară de aceasta, pe când în primul caz, factorul de amplificare a avut o valoare determinată de mărimea fluxului nominal de excitație și nu depindea de mărimea curentului din rotor, în cel de al doilea caz acest factor de amplificare depinde atât de mărimea curentului I_{r0} cât și de aceea a fluxului Φ_0.

Sensul fizic al ecuațiilor operaționale ale obiectului de reglare examinat (precum și al ecuațiilor operaționale ale oricărui alt element) poate fi explicat dacă se pornește dela următoarele premize simple. Dacă obiectul de reglare cercetat nu ar fi avut părți în care rezerva de energie [1]) să fie variabilă atunci în orice moment, între mărimile de intrare și de ieșire ar exista o relație univocă proporțională, al cărei factor de proporționalitate este egal cu factorul de amplificare.

Existența acestor părți, cu acumulare de energie variabilă, creează condițiile în care dependența dintre mărimea de ieșire și mărimea de intrare reprezintă o funcție de timp, a cărei structură este determinată, în primul rând, de parametrii elementului (constantele de timp, factorul de amplificare) și, în al doilea rând, de condițiile inițiale ale fenomenului tranzitoriu. Ecuațiile obținute determină natura legăturii dintre mărimile de intrare și cele de ieșire.

[1]) Acumularea de energie poate avea loc în capacitatea electrică, în inductanță, în masa în mișcare, în resort, etc.

1—2. ELEMENTELE DE MĂSURARE

Să cercetăm câteva elemente de măsurare folosite în sistemele de reglare automată a tensiunii generatorilor și în

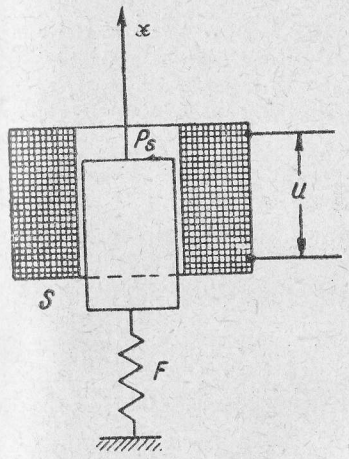


Fig. 1—2. Schema solenoidului cu arc de reacțiune.

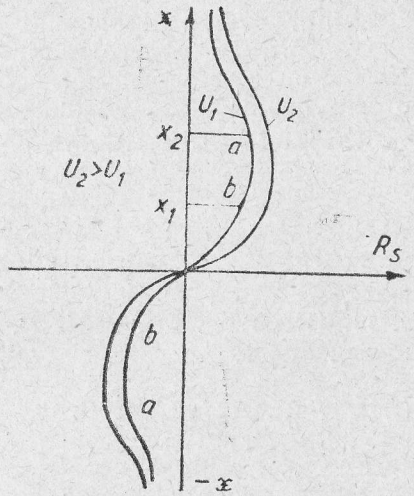


Fig. 1—3. Caracteristicile solenoidului.

sistemele de reglare a vitezei și a unghiului de rotație ale axelor motoarelor electrice.

a) *Solenoid cu resort de reacțiune*

Ca exemplu, să cercetăm un element de măsurare al cărui principiu de funcționare a fost explicat în schema din fig. 1—3. Vom determina ecuația lui operațională și vom explica caracteristicile sale care sunt de mare importanță pentru întregul sistem de reglare.

Ca mărime de intrare a acestui element se consideră tensiunea reglabilă u_e, iar de ieșire, poziția pe care o ocupă armătura solenoidului. Această poziție se notează prin coordonata

x (fig. 1—2). Ca poziție inițială se consideră poziția în care armătura este atrasă în întregime în interiorul solenoidului. Această poziție se ia ca bază de calcul. Când armătura se află în interiorul solenoidului, eforturile electromecanice care acționează asupra armăturii sunt egale cu zero. In fig. 1 — 3, sunt reprezentate caracteristicile eforturilor electromecanice ale solenoidului, care se consideră funcții ale poziției armăturii în raport cu diferitele tensiuni aplicate la bornele solenoidului.

Pentru a se putea stabili ecuația mișcării armăturii solenoidului, se determină expresia forțelor care acționează asupra ei.

Asupra armăturii solenoidului acționează următoarele forțe :

1. Efortul F al resortului, dirijat pe direcția lui x (în jos). Notăm cu F_0 efortul resortului corespunzător poziției pe care o ocupă armătura când tensiunea $u_0 = u_s$.

Pentru orice poziție x a armăturii, ecuația care reprezintă eforturile resortului se va scrie :

$$F = F_0 + C_1 x,$$

în care C_1 este o constantă, care reprezintă rigiditatea resortului.

2. Greutatea armăturii Q. Acest efort acționează deasemenea în jos.

3. Forța de atracție a solenoidului P_s, dirijată în sus (fig. 1—2). Această forță depinde de valoarea tensiunii aplicate u_0, precum și de poziția armăturii solenoidului.

In cazul general, expresia forței de atracție a solenoidului se poate scrie sub forma :

$$P_s = \int_0^i \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, di, \qquad (1-23)$$

în care Ψ este fluxul total produs de solenoid ;
i — curentul în înfășurarea solenoidului ;
x — poziția armăturii.

Practic, este rațional să se lucreze în porțiunea caracteristicii solenoidului în care, pentru o valoare dată a tensiunii eforturilor vor fi maxime. Această condiție este îndeplinită de porțiunea $a—b$ a caracteristicii solenoidului (fig. 1—3). In cele ce urmează vom admite că solenoidul lucrează în această porțiune a caracteristicii (porțiunea x_1, x_2 fig. 1—3), iar forța

P_s, corespunzătoare acestei porțiuni, nu depinde de coordonata x.

Ținând seama de expresia (1—23), considerăm că, în porțiunea de lucru a caracteristicii, fluxul total Ψ reprezintă o funcție liniară de coordonata x, deoarece, în acest caz, forța P_s nu va depinde de x. Rezultă, deci, că fluxul total poate fi reprezentat prin ecuația :

$$\Psi = (a + b\,x)\,i, \qquad (1-24)$$

în care a și b sunt constante.

Expresia $(a + bx)$ are dimensiunile unei inductanțe.

In cazul de față, mărimea acestei inductanțe, depinde de poziția armăturii solenoidului.

Din (1—24) se deduce :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = bi. \qquad (1-25)$$

Inlocuind (1—25) în (1—23), se obține :

$$P_s = \int_0^i bi\, di = \frac{bi^2}{2}. \qquad (1-26)$$

Transformăm ecuația obținută, în cazul unor variații mici ale curentului. Fie :

$$i = I_0 + \Delta i, \qquad (1-27)$$

în care I_0 este mărimea curentului permanent, corespunzător tensiunii permanente u_0.

Este evident că :

$$I_0 = \frac{u_0}{r},$$

unde r este rezistența înfășurării solenoidului.

Inlocuind valorile curentului din (1—27) în (1—26), se obține :

$$P_s = \frac{b}{2}[I_0^2 + 2\,I_0 \Delta i + (\Delta i)^2].$$

Neglijând mărimea $(\Delta i)^2$, care este un infinit mic de ordinul doi, se obține :

$$P_s = \frac{b}{2}\,(I_0^2 + 2I_0\Delta i) \qquad (1-28)$$

In ecuația (1—28), a rămas nedeterminată mărimea Δi. Pentru a putea determina pe Δi, se utilizează ecuația de echilibru electric al circuitului solenoidului. Vom avea :

$$u_g = ri + \frac{d\Psi}{dt}$$

sau

$$u_g = ri + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial i}\frac{di}{dt}. \qquad (1-29)$$

După cum rezultă din (1—24), fluxul total Ψ depinde atât de curentul i, cât și de coordonata x.

Pentru variații mici ale tensiunii, vom avea :

$$(U_0 + \Delta u_g) = (I_0 + \Delta i)r + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial i}\frac{d(I_0+\Delta i)}{dt}. \qquad (1-30)$$

Scăzând din (1—30) valoarea permanentă a tensiunii U_{g0}, și ținând seama de expresia (1—25) a lui $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, se obține :

$$\Delta u_g = \Delta i r + bI_0\frac{dx}{dt} + b\Delta i\,\frac{dx}{dt} + L\frac{d\Delta i}{dt}. \qquad (1-31)$$

în care $L = \frac{\partial\Psi}{\partial i}$ este inductanța bobinei.

Dacă deplasarea armăturii este mică, se poate neglija termenul $b\Delta i\,\frac{dx}{dt}$, considerat ca un infinit mic de ordinul doi. Din (1—31) se obține :

$$\Delta i = \frac{\Delta u_g - b\,I_0\,px}{r + Lp}.$$

Inlocuind expresia lui Δi în ecuația (1—28) a forței P_s, rezultă :

$$P_s = \frac{b}{2}\,I_0^2 + bI_0\,\frac{\Delta u_g - b\,I_0\,px}{r + Lp}.$$

Având expresia tuturor forțelor care acționează asupra armăturii, se stabilește ecuația mișcării acesteia, de exemplu pentru cazul când armătura se deplasează în sus [1]),

$$-mp^2x - C_1x - F_0 - Q + P_{s0}\,\frac{bI_0\Delta u_g - b^2I_0^2px}{Lp + r} = 0 \qquad (1-32)$$

In cazul regimului permanent, când tensiunea generatorului este egală cu cea impusă, ecuația (1—32) va lua forma :

$$P_{s0} = F_0 + Q,$$

în care P_{s0} este forța permanentă a solenoidului când tensiunea generatorului este egală cu cea dată.

Ținând seama de această condiție, care rezultă din proprietățile statice ale elementului, se obține :

$$mp^2x + C_1x + \frac{b^2I_0^2}{Lp + r}\,px = \frac{bI_0\Delta u_g}{Lp + r}$$

sau, după o serie de transformări simple, rezultă :

$$[mLp^3 + LC_1p + mrp^2 + b^2I_0^2p + rC_1]x = bI_0\Delta u_g. \qquad (1-33)$$

Impărțind ecuația (1—33) cu C_1r și notând :

$\frac{m}{C_1} = T_m^2$ — pătratul constantei de timp, datorită existenței masei ;

$\frac{L}{r} = T_s$ — constanta de timp a înfășurării solenoidului ;

$\frac{b^2}{C_1}\,\frac{I_0^2}{r} = T$ — o constantă, care reprezintă un timp ;

$\frac{bI_0}{rC_1} = K$ — factorul de amplificare,

se obține, după o serie de transformări simple, următoarea expresie :

$$[T_m^2\,T_sp^3 + T_m^2p^2 + (T_s + T)\,p + 1]x = K\Delta u_g$$

sau

$$\frac{x}{\Delta u_g} = \frac{K}{T_m^2T_s\,p^2 + T_m^2p^2 + (T_s + T)\,p + 1}. \qquad (1-34)$$

[1]) Eforturile dirijate în jos vor fi notate cu semnul — (minus) și invers.

Dacă se neglijează constanta de timp T_s a solenoidului, expresia (1—34) se poate scrie :

$$\frac{x}{\Delta u_g} = \frac{K}{T_m^2 p^2 + Tp + 1} \qquad (1—35)$$

Expresiile (1—34) şi (1—35) vor fi tocmai ecuaţiile operaţionale ale solenoidului în cazurile considerate.

Să explicăm o parte dintre particularităţile elementului de măsurare studiat. La stabilirea ecuaţiei operaţionale, să presupunem că solenoidul lucrează în acea porţiune a caracteristicii în care forţa P_s nu depinde de poziţia x a armăturii. Invers, efortul produs de resort este o funcţie liniară de coordonata x. In fig. 1—4, sunt reprezentate caracteristicile P_s şi F, ca funcţii ale coordonatei x pentru porţiunea de lucru a caracteristicii solenoidului (între valorile coordonatelor x_1 şi x_2 fig. 1—3). Este evident că echilibrul static poate avea loc numai în punctele în care caracteristicile P_s şi F se întretaie.

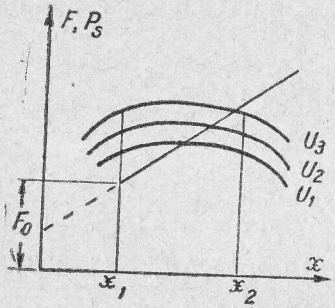


Fig. 1—4. Caracteristicile solenoidului şi ale arcului.

Admitem că, datorită variaţiei sarcinii la bornele generatorului, tensiunea acestuia şi-a schimbat valoarea. Pentru a reveni la tensiunea iniţială, după variaţia sarcinii, trebue să se modifice rezistenţa în circuitul de excitaţie al generatorului, conform schemei din fig. I —1, fapt care necesită modificarea poziţiei armăturii solenoidului. Pentru ca tensiunea să varieze în mod corespunzător, noua stare de echilibru trebue să aibă loc după ce armătura solenoidului îşi schimbă poziţia. Acestei noi poziţii a armăturii îi corespunde o altă valoare a efortului resortului. Rezultă că această nouă stare nu va mai corespunde valorii tensiunii propuse, ci unei valori oarecum diferite de aceasta. Noua poziţie de echilibru va fi determinată prin punctul de intersecţie a caracteristicilor eforturilor solenoidului şi resortului.

Proprietatea acestui sistem care constă în aceea că tensiunea permanentă depinde de valoarea sarcinii se numeşte statism, iar sistemul de reglare se numeşte sistem static. In

fig. 1—5, este reprezentată caracteristica unui sistem static de reglare. Pe axa ordonatelor se înscrie valoarea reglabilă U_g, iar pe axa absciselor, încărcarea I.

Valoarea statismului se determină prin unghiul de înclinare α al caracteristicii $U_g = f(I)$ (fig. 1—5).

După cum se va vedea mai jos, unghiul α, deci şi statismul, va fi cu atât mai mic, cu cât factorul de amplificare al circuitului care formează sistemul de reglare va fi mai mare.

Din exemplul studiat, rezultă că elementul de măsură poate fi astfel determinat încât valoarea reglabilă să se menţină constantă, independent de variaţia sarcinii. La aceasta se ajunge, tensiunea de reglare fiind dată, când echilibrul se produce, indiferent de poziţia pe care o ocupă armătura solenoidului.

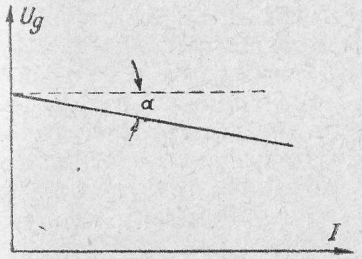


Fig. 1—5. Caracteristica sistemului static de reglare.

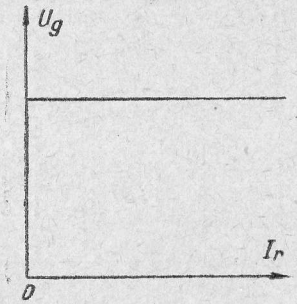


Fig. 1—6. Caracteristica sistemului astatic de reglare.

Elementul de măsură care posedă o astfel de proprietate poartă denumirea de element astatic.

In fig. 1—6, este reprezentată caracteristica unei reglări astatice a sistemului (de exemplu, variaţia tensiunii generatorului U_g în funcţie de curentul rotorului I_r). In acest caz, statismul va fi egal cu zero.

Pentru a se putea obţine caracteristica astatică în cazul exemplului elementului de măsură studiat, trebue ca în porţiunea de funcţionare a caracteristicii solenoidului (porţiunea x_1 x_2) efortul de reacţiune al resortului să rămână practic constant, indiferent de poziţia pe care o ocupă armătura. In aceste condiţii, echilibrul se va stabili numai la valoarea dată

a tensiunii. Practic, o astfel de caracteristică se realizează prin introducerea unuia sau a mai multor resoarte cu coeficienți de elasticitate diferiți sau prin cuplarea resortului de reacțiune cu armătura, prin intermediul unei pârghii de lungime variabilă).

Să examinăm forma ecuației operaționale a unui element de măsură cu caracteristică astatică. Dacă efortul de reacțiune nu depinde de poziția armăturii, în ecuația (1—33) vom considera :

$$C_1 = 0.$$

In acest caz, ecuația va lua forma :

$$(mLp^3 + mrp^2 + b^2 I_0^2 p)x = bI_0 \Delta u_2$$

sau

$$p(Ap^2 + Bp + 1)x = K_a \Delta u_g, \qquad (1-36)$$

unde

$$A = \frac{L\,m}{b^2 I_0^2}\ ; \quad B = \frac{m\,r}{b^2 I_0^2}\ ; \quad K_a = \frac{1}{bI_0}\ ;$$

K_a se numește *coeficient astatic de amplificare*, a cărui unitate de măsură este 1/s.

Ecuația (1—36) se va scrie :

$$\frac{x}{\Delta u_g} = \frac{K_a}{p^2(Ap^2 + Bp + 1)}. \qquad (1-37)$$

Dacă se neglijează inductanța înfășurării solenoidului, ecuația operațională studiată a elementului astatic de măsurare se poate scrie sub forma :

$$\frac{x}{\Delta u_g} = \frac{K_a}{p(Bp + 1)}. \qquad (1-38)$$

[1]) Un astfel de dispozitiv este folosit la regulatorul cu cărbuni al Fabricii electromecanice din Harcov.

b) *Generatorul tachimetric*

Generatorul tachimetric este utilizat foarte frecvent ca element de măsurare în sistemele de reglrea a vitezei motoarelor electrice. El este un generator cu excitație separată sau cu magneți permanenți, cuplat prin intermediul unui reductor cu motorul care urmează să fie reglat.

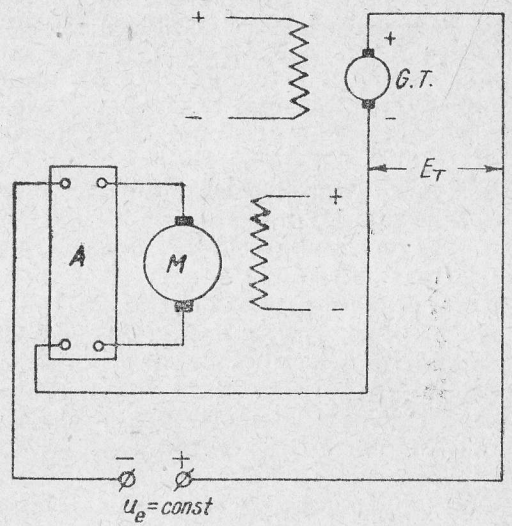


Fig. 1—7. Schemă de principiu pentru reglarea vitezei motorului prin variația tensiunii rotorului

Forța electromotoare a acestui generator poate fi exprimată prin relația :

$$e_T = C_e \Phi n$$

Intrucât fluxul generatorului tachimetric se menține constant

$$\Phi = \text{const},$$

rezultă :

$$e_T = Kn.$$

Aceasta înseamnă că f.e.m. a generatorului tachimetric este proporțională cu viteza acestuia. Utilizarea generatorului tachimetric este foarte practică în cazul măsurării vitezei, întrucât el îndeplinește extrem de simplu funcția care revine unui element de măsurare. Intrucât, în cazul de față, nu avem de a face în mod direct cu noțiunea de viteză, ci cu echivalentul ei electric, care nu este decât o formă oarecare a f.e.m., orice sursă constantă de tensiune va putea servi, în acest caz, ca etalon pentru compararea f.e.m. a generatorului tachimetric.

In fig. 1—7, este reprezentată cea mai simplă schemă de reglare a vitezei unui motor electric de curent continuu, prin variația tensiunii aplicată rotorului, în cazul unei excitații constante. Rotorul motorului *M* este alimentat dela amplificatorul *A*. La intrarea în amplificator, se aplică o tensiune

a cărei valoare este egală cu diferența dintre tensiunea generatorului tachimetric cuplat pe arborele motorului și a sursei de tensiune constantă care servește drept etalon.

Intr'un regim permanent, această diferență este :

$$U - e_T = \Delta u,$$

determinându-se astfel valoarea tensiunii la ieșirea din amplificator.

In acest caz, amplificatorul va produce la bornele rotorului motorului o tensiune a cărei valoare să permită realizarea vitezei date. Să presupunem că, datorită schimbării sarcinii motorului, se schimbă și viteza lui. In acest caz, se va modifica și e_T deci și diferența tensiunilor Δu, dela intrarea în amplificator. Dacă viteza motorului scade, Δu crește, ceeace face ca tensiunea dela bornele motorului să crească. Creșterea tensiunii duce la o creștere corespunzătoare a vitezei. Invers, dacă în urma variației sarcinii, viteza motorului crește, diferența Δu se va micșora. Aceasta duce la o scădere a tensiunii la bornele rotorului motorului, deci la o scădere a vitezei lui de rotație. Noul regim stabilizat se obține numai atunci când viteza motorului, a cărei precizie de reglare depinde de parametrii sistemului, se va apropia de valoarea propusă.

In felul acesta, generatorul tachimetric împreună cu tensiunea etalon vor forma un element de măsurare.

c) *Elementul de măsurare cu autosincronizare (selsin)* [1]).

Să examinăm elementul de măsurare care servește pentru a măsura diferența de poziție a diferitelor organe, element foarte mult utilizat în sistemele de transmitere a comenzilor.

In fig. 1—8, este reprezentată cea mai simplă schemă a unui sistem de transmitere a comenzilor. Acest sistem trebue să asigure, în mod automat, rotirea arborelui motorului *M* în conformitate cu comenzile primite dela alte aparate.

Pentru măsurarea dezacordului dintre organele de comandă și cele de funcționare (în cazul de față), se folosesc două sisteme de autosincronizare, unul numit selsin-emițător *SSE* și al

[1]) Cuvântul „selsin" este format din două cuvinte și anume : „sel" primele trei litere dela „self" — auto și „sin" — sincronizare ; selsin înseamnă „autosincronizare" (N. trad.).

doilea selsin-receptor *SSR*, care lucrează în regim de transformator. Infășurările trifazate ale selsinurilor sunt așezate pe statorii acestora și rămân imobile. Infășurările monofazate sunt așezate pe rotorii selsinurilor.

Infășurarea monofazată a selsinului emițător este alimentată dela o sursă de curent alternativ. Rotorul selsinului re-

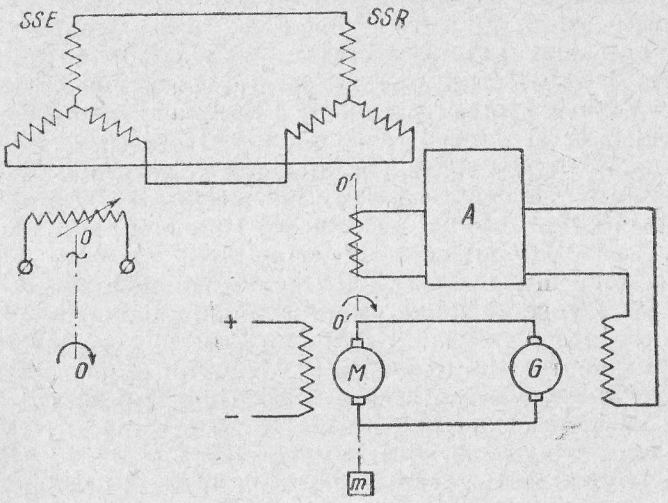


Fig. 1—8. Schema de principiu a unui sistem de transmitere.

ceptor se cuplează mecanic cu aparatul respectiv (nu este reprezentat în figură), în așa fel încât aparatului i se imprimă sensul de rotație al rotorului *SSE*. Când înfășurarea monofazată a selsinului receptor este geometric decalată cu 90° față de înfășurarea monofazată a selsinului emițător (poziția este indicată în fig. 1—8), tensiunea înfășurării monofazate *SSR* este egală cu zero. Să considerăm că această poziție corespunde valorii zero a unghiului de divergență, unghi format de axa dată *OO* cu axa *O'O'*.

Caracteristica amplificatorului se alege în așa fel, (fig. 1—8) încât la o valoare egală cu zero a tensiunii la intrarea în amplificator, tensiunea la ieșire să fie deasemenea egală cu zero. Acest amplificator îndeplinește simultan și funcția de redresor dirijat, întrucât la intrare i se aplică o tensiune

alternativă, iar la ieșire se obține o tensiune în curent continuu, a cărui polaritate este determinată de faza respectivă, iar mărimea ei este egală cu valoarea reală a tensiunii la ieșire. Luând în considerație faptul că la intrarea în amplificator se aplică tensiunea înfășurării monofazate *SSR*, se obține, în cazul unghiului de divergență egal cu zero, o tensiune la ieșirea din amplificator deasemenea egală cu zero. Deoarece tensiunea la ieșirea din amplificator alimentează înfășurarea de excitație a generatorului *G*, la care este cuplat rotorul motorului, este evident că atunci când unghiul de divergență este egal cu zero, motorul *M* va rămâne nemișcat. Presupunem că rotorul selsinului-emițător se rotește cu un unghi oarecare față de poziția zero. In acest caz, în înfășurarea rotorului selsinului-receptor va lua naștere o tensiune alternativă. Amplitudinea acestei tensiuni, pentru valorile mici ale unghiului de divergență, va fi proporțională cu unghiul de divergență a rotorilor selsinurilor. In acest caz, faza tensiunii înfășurării rotorului *SSR* va depinde de semnul unghiului de divergență și anume, dacă se consideră că la un decalaj al rotorului *SSE* în sensul acelor unui ceasornic, f.e.m. din înfășurarea rotorului *SSR* va avea un sens oarecare bine determinat, atunci la un același decalaj al rotorului *SSE* în sens invers acelor unui ceasornic, f.e.m. din înfășurarea rotorului *SSR* va fi decalată, față de primul caz, cu 180°. In felul acesta, vectorul f.e.m. a înfășurării rotorului *SSR* determină în întregime valoarea și semnul unghiului de rotație al rotorului *SSE*, față de rotirea *SSR*; deci, poate servi ca element de măsurare în sistemul de reglare a unghiului de rotație al motorului.

Acționarea acestui sistem simplu de repetare a comenzilor se produce în felul următor. La rotirea rotorului *SSE* cu un unghi oarecare, în înfășurarea rotorului *SSR* ia naștere o tensiune proporțională cu unghiul de divergență. Această tensiune se aplică rotorului motorului *M* prin amplificatorul *A* și generatorul *G*, după ce a fost transformată și amplificată. In felul acesta, la apariția unghiului de divergență, motorul va primi o tensiune, iar rotorul va începe să se rotească, punând în mișcare mecanismul cuplat cu arborele motorului (fig. 1—8) și cu rotorul selsinului receptor (*SSR*). In cazul unui sistem corect conectat, rotorul *SSR* se va roti în sensul micșorării unghiului de divergență.

Dacă rotorul selsinului emițător *SSE* se rotește după o lege oarecare, motorul va repeta, cu un grad de precizie oarecare, această lege a mișcării.

Ca unitate de măsură a tensiunii din înfășurarea rotorului *SSR* va servi unghiul de divergență dintre rotațiile rotorilor *SSE* și *SSR*. In cazul general, dacă unghiul de rotație al rotorului *SSE* se notează cu θ_1, iar unghiul de rotație al rotorului *SSR*, cu θ_2, ecuația f.e.m. a înfășurării rotorului *SSR* pentru valorile mici ale unghiurilor de divergență, se va scrie sub forma:

$$e_1 = K(\theta_1 - \theta_2) = K\delta, \qquad (1-39)$$

unde K este un coeficient de proporționalitate.

Din (1—39) rezultă:

$$K = \frac{e_s}{\delta};$$

deci K este factorul de amplificare al elementului de măsurare.

1—3. AMPLIFICATORII

Ca exemplu de amplificator să examinăm amplidina, care este folosită pe scară destul de largă în sistemele de reglare automată și să-i determinăm ecuația operațională.

Amplidina poate îndeplini simultan atât funcția de element de măsurare cât și pe cea de amplificator, în raport cu numărul înfășurărilor de excitație și cu modul de legare a lor. In fig. 1—9, este reprezentată schema unei amplidine. Principiul de funcționare al amplidinei este următorul:

Curentul care trece prin înfășurarea de excitație creează un flux magnetic Φ, dirijat dealungul axei longitudinale $A-A'$. In timpul rotirii rotorului AMPL [1]), acest flux induce în înfășurarea rotorului o f.e.m., care este culeasă de periile situate pe axa $B-B'$, perpendiculară pe axa câmpului longitudinal. Axa $B-B'$ poartă denumirea de axă transversală a AMPL. Periile, care sunt așezate pe axa transversală, se scurtcircuitează, formând un circuit pentru f.e.m. produsă de fluxul Φ.

[1]) AMPL = amplidină (N. trad.).

Curentul care trece prin circuitul scurtcircuitat dă naştere unui câmp transversal Φ_s, iar rotorul care se roteşte în acest câmp induce o f.e.m. comutată de periile aşezate pe axa AA'. Deoarece circuitul scurtcircuitat are o rezistenţă mică, este suficient să avem o forţă de magnetizare cât de mică (f.m.) în câmpul de excitaţie longitudinal, pentru ca prin circuitul scurtcircuitat să treacă un curent suficient de mare pentru a produce, în excitaţia AMPL, un flux transversal de mărime necesară. Particularitatea principală a AMPL constă în existenţa înfăşurării de compensare, care are ca scop să anuleze reacţia indusului ce se produce în dreptul axei longitudinale a maşinii prin trecerea curentului principal. Calităţi preţioase ale AMPL, în ceeace priveşte folosirea ei în sistemele de reglare, sunt următoarele: putere mică la intrare, putere suficient de mare la ieşire, factor de amplificare ridicat şi acţionare rapidă. Să examinăm modul de funcţionare a AMPL în schema de reglare a tensiunii. La înfăşurarea *1* (fig. 1—9) este aplicată o tensiune constantă. Forţa magnetomotoare a înfăşurării, care rămâne constantă, contribue la ridicarea tensiunii AMPL. Infăşurarea *2* este alimentată de o tensiune variabilă. Forţa magnetomotoare a acesteia dă naştere unui flux dirijat în sens invers fluxului produs de forţa de magnetizare a înfăşurării *1*.

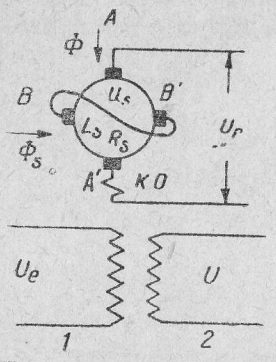


Fig. 1—9. Schema amplidinei.

Intr'un regim permanent, diferenţa f.m.m. a înfăşurărilor *1* şi *2*, $F_1 - F_2$, condiţionează tensiunea rotorului AMPL, u_r. Este evident că, valoarea lui u_r trebue să fie astfel încât tensiunea reglabilă să fie egală cu tensiunea dată.

Dacă, dintr'un motiv oarecare, de exemplu din cauza variaţiei sarcinii, tensiunea reglabilă îşi schimbă valoarea, se va schimba şi F_2. Ca urmare a schimbării lui F_2, se va schimba şi diferenţa $F_1 - F_2$. Dacă tensiunea reglabilă s'a micşorat, diferenţa forţelor magnetomotoare ale înfăşurărilor AMPL creşte, fapt care duce la creşterea tensiunii la ieşirea din AMPL. Invers, dacă tensiunea reglabilă s'a mărit, diferenţa forţelor magnetomotoare a înfăşurărilor se micşorează,

ceeace atrage după sine micşorarea tensiunii reglabile. Noul regim permanent se va produce când tensiunea reglabilă determinată de statismul sistemului va avea o valoare dată precisă.

Să determinăm ecuaţia operaţională a AMPL, considerând că reacţiunea longitudinală a indusului este compensată în întregime. Neglijând inducţia mutuală a înfăşurărilor *1* şi *2*, se consideră că curentul din înfăşurarea *1* rămâne permanent

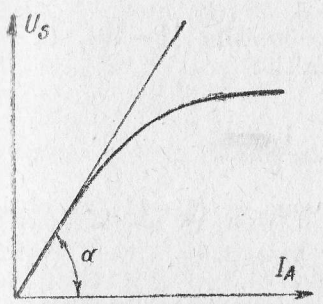


Fig. 1—10. Caracteristica de mers în gol a primului etaj de amplificare.

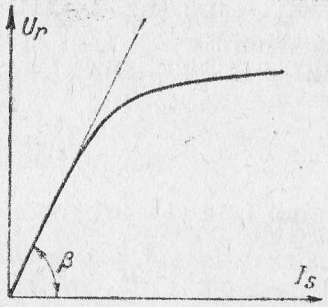


Fig. 1—11. Caracteristica de mers în gol a celui de al doilea etaj de amplificare.

constant. Pentru înfăşurarea *2*, avem următoarea ecuaţie:

$$u_r = L_2 p i_2 + R_2 i_2, \qquad (1—40)$$

unde L_2 şi R_2 sunt inductanţa, respectiv rezistenţa circuitului înfăşurării *2*.

In porţiunea rectilinie a caracteristicii de magnetizare, tensiunea dela bornele circuitului scurtcircuitat u_s al maşinii se poate scrie:

$$u_s = K_1' i_1 - K_2' i_2,$$

sau, dacă numărul de spire din înfăşurările *1* şi *2* este acelaşi:

$$u_s = K_1' (i_1 - i_2), \qquad (1—41)$$

unde $K_1' = \operatorname{tg}\alpha$ (fig. 1—10).

Ecuaţia echilibrului electric al circuitului scurtcircuitat se va scrie:

$$u_s = L_s p i_s + R_s i_s, \qquad (1—42)$$

unde L_s și R_s sunt : inductanța și rezistența circuitului scurtcircuitat al AMPL.

Insfârșit, legătura dintre tensiunea la ieșire a AMPL, u_r, și curentul i_r, din circuitul scurtcircuitat, în limitele porțiunii rectilinii a caracteristicii de magnetizare a mașinii, va fi de forma :

$$u_r = K'_2 i_s, \qquad (1-43)$$

unde $K'_2 = \mathrm{tg}\beta$ (fig. 1—11).

Să eliminăm i_2, i_s și u_s între ecuațiile (1—40), (1—41), (1—42) și (1—43). Din (1—42) rezultă :

$$i_s = \frac{u_s}{L_s p + R_s};$$

înlocuind i_s în (1—43) și ținând seama de (1—41), se obține :

$$(L_s p + R_s) u_r = K'_2 K'_1 (i_1 - i_2). \qquad (1-44)$$

Insă, din (1—40) :

$$i_2 = \frac{u}{L_2 p + R_2}.$$

Inlocuind valoarea lui i_2, se obține :

$$(L_s p + R_s)(L_2 p + R_2) u_r = K'_2 K'_1 (i_1 R_1 - u). \qquad (1-45)$$

Impărțim ecuația (1—45) prin R_2 R_s și introducem următoarele notații :

$\frac{L_s}{R_s} = T_s$ — constanta de timp a circuitului scurtcircuitat al AMPL ;

$\frac{L_2}{R_2} = T_2$ — constanta de timp a înfășurării 2, pe care o vom denumi înfășurarea de comandă ;

$\frac{K'_1 K_2}{R_1 R_s} = \frac{u_s u_a}{i_s R_s i_2 R_2} = K$ — factor de amplificare a tensiunii AMPL.

Ecuația (1—45) devine :

$$(T_2 p + 1)(T_s p + 1) u_r = K (U_e - u), \qquad (1-46)$$

unde U_e este tensiunea constantă aplicată înfășurării 1 a AMPL.

Ecuația (1—45) este ecuația operațională a amplidinei. Dacă AMPL este folosită numai ca amplificator $U_e = 0$ și ecuația ei operațională va lua forma :

$$(T_2 p + 1)(T_s p + 1) u_r = K u \qquad 1-47$$

1—4. ORGANELE DE REGLARE

Organele de reglare formează acele sisteme de reglare automată care acționează asupra obiectului de reglare în scopul de a înlătura deviațiile valorii reglabile dela valoarea dată. In foarte multe cazuri, organul de reglare formează partea constructivă a obiectului de reglare. Exemplul cel mai tipic al unui asemenea organ de reglare îl reprezintă registrul unei mașini cu abur, care dirijează accesul aburului în cilindru. In sistemul de reglare a tensiunii generatorului electric, reprezentat în fig. I—3, ca organ de reglare poate fi considerată traversa, a cărei poziție determină valoarea tensiunii care acționează asupra înfășurării de excitație a generatorului. In schema de reglare a vitezei motorului (fig. 1—8), ca organ de reglare poate fi considerată înfășurarea de excitație a generatorului care alimentează motorul.

Exemplele examinate în acest capitol privind elementele de bază ale sistemelor de reglare automată nu epuizează diversitatea metodelor de reglare automată, folosite în practică. Exemplele mai sus menționate, precum și alte câteva care vor fi examinate în cursul studiului sistemelor de reglare, ne dau în primul rând o imagine clară asupra principiului de funcționare a acestor elemente și în al doilea rând indică metodele pentru determinarea ecuației operaționale a fiecărui element, fapt care este necesar pentru cercetarea proprietăților statice și dinamice ale caracteristicilor de reglare automată.

CAPITOLUL II

ELEMENTELE TIP ŞI SCHEMELE STRUCTURALE ALE SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

Pentru studierea sistemelor complexe şi în special pentru alegerea structurii corecte a sistemului de reglare, este bine ca alegerea părţilor componente ale sistemului de reglare să nu se facă în raport cu funcţiile pe care sistemele le îndeplinesc, ci în raport cu proprietăţile lor dinamice.

In acest scop, se aleg cele mai simple elemente, ale căror combinaţii permit realizarea proprietăţilor dinamice în orice sistem de reglare.

Luând în consideraţie lucrările menţionate în bibliografie (B. 1—8), introducem trei tipuri de elemente: elemente de relaxare, elemente oscilatoare şi elemente de integrare. Aceste elemente sunt suficiente pentru a se putea studia destul de amănunţit clasele sistemelor tratate în cartea de faţă. Elementele de stabilizare vor fi studiate aparte.

2—1. ELEMENTUL DE RELAXARE

Din analiza proprietăţilor unor elemente ale sistemelor de reglare automată expuse în cap. I, rezultă că elementele în care se acumulează energia sub orice formă (de exemplu în capacitate sau inductanţă) şi în acelea în care energia se poate disipa (de exemplu în rezistenţă), procesele tranzitorii pot fi reprezentate prin ecuaţia:

$$(1 + Tp)x_e = Kx_i \qquad (2-1)$$

sau

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{K}{1+Tp}, \qquad (2-2)$$

unde T este constantă de timp;
K — factorul de amplificare;
x_e — mărimea la ieşire;
x_i — mărimea la intrare.

Ca exemplu al unui astfel de element poate servi generatorul de curent continuu cu excitaţie separată studiat în § 1—1 (ecuaţia operaţională 1—6). După cum s'a văzut, s'a considerat ca mărime de intrare tensiunea la bornele înfăşurării de excitaţie, iar ca mărime de ieşire, tensiunea dela bornele rotorului.

Prin aceeaşi ecuaţie sunt reprezentate procesele tranzitorii din motorul de curent continuu, în cazul reglării vitezei acestuia prin variaţia tensiunii rotorului, considerând că fluxul de excitaţie este constant şi că inductanţa rotorului este neglijabilă (ecuaţia operaţională 1—17). In acest caz, ca mărime de intrare s'a considerat tensiunea rotorului, iar ca mărime de ieşire, viteza lui sau f.e.m. a motorului, proporţională cu viteza acestuia.

Elementul care înlocueşte, în schemele structurale, un element de bază de această natură, îl vom numi element de relaxare [1]).

Un exemplu al modului în care se combină elementele de relaxare pentru a forma un element mai complex îl constitue amplidina, studiată în capitolul anterior. De remarcat că ecuaţia operaţională a amplidinei (1—46) se obţine în cazul când AMPL este înlocuită prin două elemente de relaxare legate în serie, având constantele de timp T_2 şi T_s şi factorii de amplificare K_1 şi K_2. In acest caz, la intrarea în primul element se va obţine mărimea de intrare $\Delta u = u_s - u$, iar la ieşirea din acest element, mărimea u_s. Mărimea de intrare a elementului al doilea va fi u_s, iar mărimea de ieşire a aceluiaşi element, tensiunea AMPL, adică u_r.

Intr'adevăr, dacă ecuaţiile elementelor mai sus menţionate se vor scrie sub forma:

$$u_s(1 + T_2 p)\, K_1 \Delta u \qquad (2-3)$$

şi

$$u_r(1 + T_s p) = K_2 u_s, \qquad (2-4)$$

eliminând din (2—3) şi (2—4) pe u_s se obţine:

$$(1+T_2 p)\,(1 + T_s p) u_r = K \Delta u,$$

adică tocmai ecuaţia operaţională a amplidinei.

Să determinăm caracterul de variaţie în timp a mărimii de intrare a elementului de relaxare, în caziul când la intrarea acesteia se aplică un impuls care are forma unui salt unitar

In acest scop, se integrează ecuaţia (2—1) şi presupunând că

$$x_i = x_o = \text{constant},$$

[1]) Inafară de această denumire, în bibliografie se întâlnesc şi denumiri ca: de inerţie, monocapacitiv sau aperiodic.

se obține :

$$x_e = Kx_o\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

In fig. (2—1), este reprezentată curba de variație a lui x_e în funcție de timp :

$$x_e = f(t).$$

In această figură sunt reprezentate : mărimea de intrare, valoarea stabilizată a mărimii de ieșire și sensul geometric al constantei de timp. Această diagramă ilustrează destul de explicit sensul fizic al factorului de amplificare K, care se determină prin raportul dintre valorile stabilite de intrare și de ieșire.

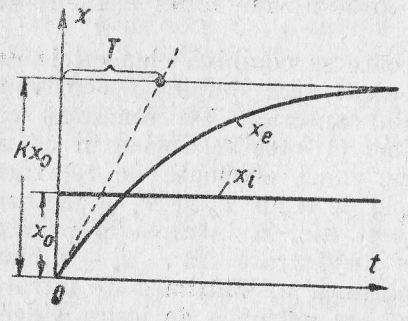


Fig. 2—1. Curba de variație a mărimii de ieșire a elementului de relaxare, în în cazul când la intrare se aplică un impuls de forma unui salt unitar.

Elementul de relaxare poate fi deasemeni definit prin caracteristica de frecvență. Dacă la intrarea în elementul de relaxare se aplică un impuls de formă sinusoidală, care variază dela zero la infinit, având amplitudinea și frecvența constante atunci în regimul stabilizat, la ieșirea din acest element vom avea deasemeni o sinusoidă de frecvență, egală cu frecvența dela intrare și diferind de ea prin amplitudine și fază. Atât amplitudinea cât și faza mărimii de ieșire vor depinde de frecvență. Locul geometric al vârfurilor razelor vectoare, ale căror module sunt egale cu raportul dintre mărimile de intrare și de ieșire și al căror argument în raport cu axa de origină a razelor este egal cu diferența fazelor, în cazul când frecvența variază dela zero la infinit, se va numi caracteristica de frecvență (sau caracteristica amplitudine-fază). Să vedem cum poate fi stabilită ecuația cu ajutorul căreia se construește caracteristica amplitudine-fază, când este dată ecuația diferențială sau operațională a elementului de bază sau a sistemului. Vom examina modul de rezolvare a acestei probleme cu ajutorul unui exemplu de element de relaxare.

Presupunem că la intrarea acestui element se aplică un impuls de formă sinusoidală, de pulsație ω și cu o amplitudine oarecare constantă care se va lua în mod convențional egală cu unitatea ; astfel, ecuația acestui element se va scrie :

$$\left(1 + T\frac{d}{dt}\right)x_e = K\sin\omega t. \qquad (2—5)$$

Intrucât, în cazul regimului permanent, mărimea de ieșire va fi deasemeni o sinusoidă cu aceeași frecvență ca și la intrare, însă cu altă amplitudine și fază, această mărime poate fi reprezentată prin :

$$x_e = X\sin(\omega t + \varphi), \qquad (2—6)$$

unde X este amplitudinea mărimii de ieșire ;
iar φ — faza ei.

Să scriem ecuațiile (2—5) și (2—6) într'o altă formă. Cu ajutorul formulei lui Euler [1]) putem scrie :

$$\sin\ \omega t = \frac{\mathrm{Im}}{j}e^{j\omega t}$$

sau $$x_e = X\sin(\omega t + \varphi) = \frac{\mathrm{Im}}{j}Xe^{j(\omega t+\varphi)} \qquad (2—7)$$

unde simbolul Im are semnificația că trebue să se considere numai partea imaginară a expresiei care urmează după acest simbol și $j = \sqrt{-1}$ este unitate imaginară.

Din (2—7) se obține, prin derivare :

$$\frac{dx_e}{dt} = \frac{\mathrm{Im}}{j}Xj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} \qquad (2—8)$$

Inlocuind (2—8) și (2—7) în (2—5), se obține :

$$\frac{\mathrm{Im}}{j}(1 + Tj\omega)Xe^{j\varphi}e^{j\omega t} = Ke^{j\omega t},$$

sau, simplificând cu $e^{j\omega t}$, rezultă :

$$\frac{\mathrm{Im}}{j}(1 + Tj\omega)Xe^{j\varphi} = K. \qquad (2—9)$$

[1]) $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$,
de unde rezultă :

$$\sin\omega t = \frac{\mathrm{Im}}{j}e^{j\omega t}$$

Eliminând pe $Xe^{j\varphi}$ între ecuațiile (2—9) și (2—7), se obține:

$$x_e = \frac{\text{Im}}{j} \frac{K}{(1 + Tj\omega)} e^{j\omega t}. \qquad (2—10)$$

Insă $\frac{K}{1 + Tj\omega}$ este un vector, care poate fi scris sub forma

$$\frac{K}{1 + Tj\omega} = \left| \frac{K}{1 + Tj\omega} \right| e^{j\varphi}$$

unde $\left| \frac{K}{1 + Tj\omega} \right|$ este modulul vectorului, iar $\varphi = \text{arc tg}(-T\omega)$, argumentul acestuia.

Prin urmare, relația (2—10) poate fi scrisă sub forma:

$$x_e = \frac{\text{Im}}{j} \left| \frac{K}{1 + Ti\omega} \right| e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

Ținând seama de faptul că mărimea de intrare este $\sin\omega t$, relația dintre mărimile de intrare și de ieșire poate fi scrisă:

$$x_e = \frac{K}{1 + Tj\omega} x_i$$

sau

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{K}{1 + Tj\omega}. \qquad (2—11)$$

Aceasta va fi ecuația caracteristicii amplitudine-fază a elementului de relaxare.

In felul acesta, pentru a se obține ecuația necesară construirii caracteristicii amplitudine-fază, trebue să se înlocuiască în ecuația operațională, valoarea p prin $j\omega$. In acest caz, pentru elementul de relaxare vom avea:

$$\frac{x_e}{x_i} = W(j\omega) = \frac{K}{1 + Tj\omega}.$$

După cum trebuia să ne așteptăm, factorul de amplificare se determină prin raportul dintre mărimea de ieșire și cea de intrare, în cazul când frecvența este egală cu zero.

In fig. 2—2, este reprezentată caracteristica amplitudine-fază (de frecvență) a elementului de relaxare.

Pentru orice frecvență, se determină, pe aceeași caracteristică, amplitudinea X și faza φ a valorii de ieșire, ca modul și argument ale vectorului trasat din originea axelor de coordonate la punctul caracteristicii corespunzătoare frecvenței date. In fig. 2—3, este redată reprezentarea convențională a elementului de relaxare.

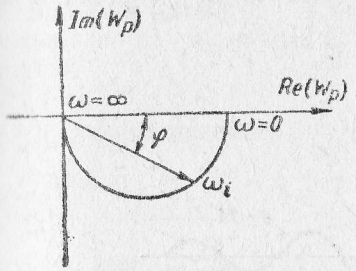


Fig. 2—2. Caracteristica amplitudine-fază a elementului de relaxare.

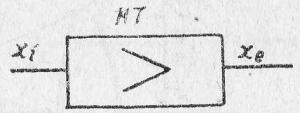


Fig. 2—3. Notarea convențională a elementului de relaxare.

2—2. ELEMENTUL OSCILATOR

Prin element oscilator se înțelege elementul a cărui mărime de intrare variază în salturi și a cărui mărime de ieșire variază sub forma de oscilații sinusoidale amortizate. Relația de legătură între mărimile de intrare și de ieșire ale unui asemenea element se determină prin ecuația operațională:

$$(p^2 + \frac{1}{\tau} p + \omega_0^2) x_e = K\omega_0^2 x_i \qquad (2—12)$$

în care τ este constanta de timp a elementului oscilator;

ω — frecvența proprie a acestui element, în cazul lipsei amortizării;

K — factorul de amplificare.

Să integrăm ecuația (2—12), cu condiția:

$$x_i = x_o = \text{constant}.$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare ecuației diferențiale (2—12) este:

$$p^2 + \frac{1}{\tau} p + \omega_0^2 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații se determină cu ajutorul formulei cunoscute :

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}$$

Presupunând că ω_0 este mai mare decât $\frac{1}{2\tau}$, rezultă că

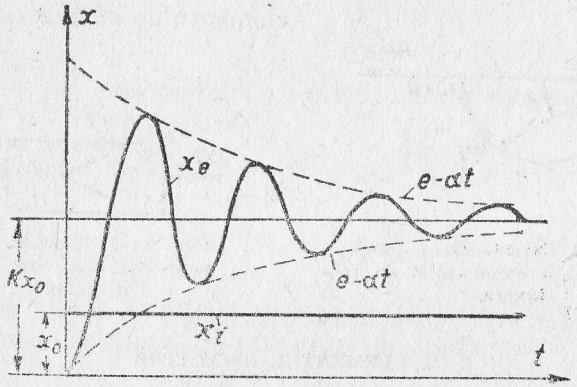


Fig. 2—4. Curba de variație a mărimii de ieșire a elementului oscilator când la intrare se aplică un impuls sub forma unui salt unitar.

ecuația va avea o pereche de rădăcini complexe, care se vor scrie sub forma :

$$p_1 = -\alpha + j\beta,$$

$$p_2 = -\alpha - j\beta,$$

$$\text{unde } \alpha = \frac{1}{2\tau} \text{ și } \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$$

Rezolvarea ecuației (2—12), în cazul condițiilor inițiale egale cu zero, dă :

$$x_e = Kx_0\left[1 - \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)\right],$$

în care $\varphi = \text{arc tg} \frac{\beta}{\alpha}$

In fig. 2—4, este reprezentată curba de variație a lui x_e în funcție de timp. După cum rezultă din această figură, curba $x_e = f(t)$ este formată dintr'o componentă constantă, proporțională cu impulsul x_0 și dintr'o oscilație sinusoidală amortizată, din jurul acestei componente constante. In cazul când $t \to \infty$, x_e va tinde spre Kx_0. In fig. (2—4) este indicată semnificația tuturor celorlați parametri ai elementului oscilator.

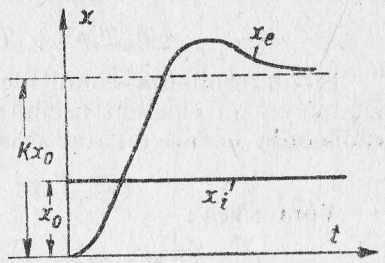


Fig. 2—5. Curba de variație a mărimii de ieșire al elementului de ordinul doi.

Presupunem acum că $\frac{1}{2\tau} > \omega_0$.

Notând :

$$\sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2} = N,$$

se obțin următoarele două rădăcini, reale și negative :

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\alpha + N, \\ p_2 &= -\alpha - N. \end{aligned}\right\} \qquad (2-13)$$

Menționăm că N este totdeauna mai mic în valoare absolută decât α.

In aceste condiții, soluția ecuației (2—12) se va scrie :

$$x_e = A_1 e^{-(\alpha - N)t} + A_2 e^{-(\alpha + N)t} + x_{e\ perm.}$$

în care A_1 și A_2 sunt constantele de integrare.

Curba de variație a lui x_e în funcție de timp nu poate avea mai mult de o singură valoare maximă, oricare ar fi condițiile inițiale (fig. 2—5).

Elementul a cărui ecuație caracteristică are rădăcini egale cu cele indicate în formula (2—13) nu poate fi considerat element oscilator. Prin urmare, condiția obligatorie ca un element din circuitul reglării automate, a cărui ecuație operațională este de ordinul doi, să poată fi considerat element oscilator, este ca rădăcinile ecuației caracteristice ale acesteia să fie complexe.

Ca exemplu de element oscilator poate fi considerată amplidina cu compensare incomplectă a reacției longitudinale.

Electromotorul la care se consideră ca mărime de ieșire viteza de rotație, iar ca mărime de intrare tensiunea rotorului, poate fi reprezentat deasemeni, în schemele structurale, ca o grupă oscilatoare, în cazul unor raporturi bine determinate între parametrii acestuia. Intr'adevăr, în cazul reglării vitezei acționând asupra tensiunii rotorului motorului, s'a considerat următoarea ecuație operațională :

$$(T_m T_r p^2 + T_m p + 1)x_e = K x_i.$$

Să determinăm condițiile în care motorul poate fi reprezentat ca un element oscilator. In acest scop, să determinăm rădăcinile ecuației caracteristice :

$$(T_m T_r p^2 + T_m p + 1) = 0. \qquad (2-14)$$

Vom avea :

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T_r} \pm \sqrt{\frac{1}{4T_r^2} - \frac{1}{T_r T_m}}$$

Rădăcinile ecuației (2—14) vor fi complexe dacă :

$$\frac{1}{T_m} > \frac{1}{4T_r}. \qquad (2-15)$$

In cazul când condiția din ecuația (2—15) este îndeplinită, motorul poate fi considerat ca un element oscilator.

Să determinăm raportul dintre parametrii elementului de măsurare autosincronizat examinat în § 1—2, în cazul când acesta este considerat element oscilator. In acest scop, vom studia ecuația operațională (1—35). Vom avea :

$$(T_m^2 p^2 + Tp + 1)x = K\Delta u. \qquad (2-16)$$

Să găsim rădăcinile ecuației caracteristice (2—16) :

$$T_m^2 p^2 + Tp + 1 = 0. \qquad (2-17)$$

Obținem :

$$p_{1,2} = -\frac{T}{2T_m^2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4T_m^4} - \frac{1}{T_m^2}}. \qquad (2-18)$$

Rădăcinile ecuației (2—17) vor fi complexe dacă :

$$T_m^2 > \frac{T^2}{4}$$

Inlocuind pe T_m și T cu valorile lor, se obține următoarea condiție :

$$mC_1 > \frac{b^4 I_0^4}{4r^2}, \qquad (2-19)$$

unde m este masa părților mobile ale solenoidului ;

C_1 — rigiditatea resortului ;

b, I_0 și r — parametrii solenoidului.

Este ușor de văzut că elementul a cărui ecuație operațională de gradul doi nu prezintă caracteristicile unui element oscilator, poate fi reprezentat prin două elemente de relaxare legate în serie. Intr'adevăr dacă rădăcinile ecuației caracteristice (2—17) sunt rădăcini reale.

$$p_1 = -\alpha + N = -A,$$

$$p_2 = -\alpha - N = -B,$$

atunci, după cum se știe din algebră, polinomul din care este formată partea stângă a ecuației (2—17) poate fi descompus în factori :

$$(p + A)\ (p + B)x_e = K\frac{x_e}{T_m^2}$$

Notând :

$$A = \frac{1}{T_1} \text{ și } B = \frac{1}{T_2},$$

$$\frac{T_1}{T_m}\sqrt{K} = K_1 \text{ și } \frac{T_2}{T_m}\sqrt{K} = K_2,$$

se obține, după o serie de transformări elementare :

$$(T_1 p + 1)\ (T_2 p + 1)x_e = K_1 K_2 x_e,$$

care reprezintă ecuația operațională a două elemente de relaxare legate în serie.

In cazul elementului de măsurare format din solenoid, condiția de reprezentare a acestuia prin două elemente de relaxare legate în serie este următoarea :

$$mC_1 < \frac{b^4 I_0^4}{4r^2}.$$

Ecuația cu ajutorul căreia poate fi construită caracteristica de frecvență a elementului oscilator este de forma:

$$\frac{x_e}{x_i} = W_K(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{(j\omega)^2 + \frac{1}{\tau} j\omega + \omega_0^2}$$

In fig. 2—6, este reprezentată caracteristica de frecvență a elementului oscilator, iar în fig. (2—7) se indică notația convențională a elementului oscilator.

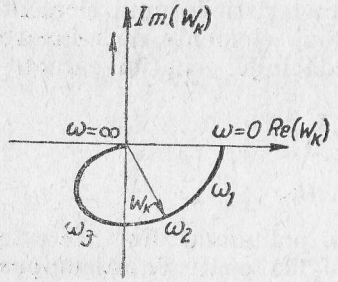


Fig. 2—6. Caracteristica amplitudine-fază a elementului oscilator.

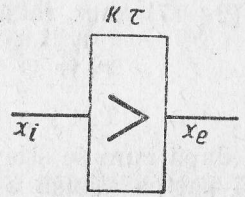


Fig. 2—7. Notația convențională a elementului oscilator.

2—3. ELEMENTUL DE INTEGRARE

Prin element de integrare se înțelege acel element a cărui mărime de ieșire este proporțională cu integrala de timp a mărimii de intrare, adică:

$$x_e = K_a \int_0^t x_i \, dt$$

sau

$$p x_e = K_a x_i \qquad (2—20)$$

de unde,

$$K_a = \frac{p x_e}{x_i}$$

este raportul dintre variația mărimii de ieșire și mărimea de intrare. Admițând că:

$$x_i = x_0 = \text{const}$$

și efectuând integrala din ecuația (2—20), se obține:

$$x_e = K_a x_0 t \qquad (2—21)$$

Din ecuația (2—21) rezultă că, dacă la intrarea elementului de integrare se aplică un impuls constant, la ieșire se obține o mărime care crește liniar cu timpul (fig. 2—8).

Ca exemplu de element de integrare se poate considera motorul de curent continuu, ale cărui constantă de timp

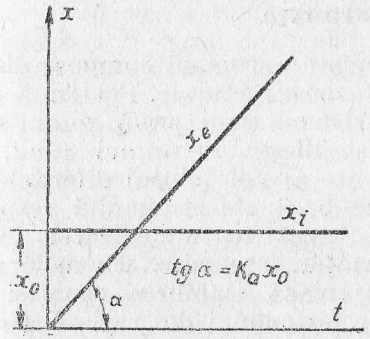


Fig. 2—8. Variația mărimii de ieșire a elementului de integrare, când la intrare se aplică un impuls de forma unui salt unitar.

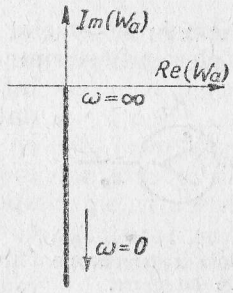


Fig. 2—9. Caracteristica amplitudine-fază a elementului de integrare.

electromecanică și constantă de timp a circuitului rotorului sunt infinit mici, dacă se consideră ca mărime de intrare tensiunea rotorului, iar ca mărime de ieșire, unghiul de rotație al arborelui. Intr'adevăr, făcând, în ecuația (1—15), $T_m = T_r = 0$, se obține:

$$p\varphi = K_0 U. \qquad (2—22)$$

De cele mai multe ori, elementul de integrare se numește și astatic. Această denumire este legată de existența elementului de integrare, prezența acestuia fiind condiția necesară pentru a se putea obține un sistem astatic de reglare. Această condiție însă nu este și suficientă.

In fig. 2—9, este reprezentată caracteristica amplitudine-fază a elementului de integrare, reprezentată prin ecuația:

$$W_a(j\omega) = \frac{K}{j\omega}.$$

Notația convențională a unui element de integrare este dată în fig. 2—10.

2—4. SCHEMELE STRUCTURALE ALE SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

Schemele sistemelor de reglare automată compuse din mai multe elemente se numesc scheme structurale. Pentru a putea întocmi schema structurală a unui sistem dat, se stabilește, în primul rând, prin ce elemente se pot înlocui diferitele elemente de bază ale sistemului respectiv, apoi se leagă toate elementele în mod corespunzător. Intocmirea schemelor structurale ușurează stabilirea ecuației diferențiale a sistemului de reglare (ecuație operațională a întregului sistem), necesară studierii modului în care decurge procesul de reglare sau de transmitere a comenzilor. Inainte de a trece la studiul câtorva exemple de întocmire a schemelor structurale, este necesar să fie rezolvată următoarea problemă concretă. La stabilirea ecuațiilor operaționale ale diferitelor elemente de bază și ale elementelor circuitului de reglare, s'a căutat să se determine variația mărimii de intrare în funcție de parametrii elementului studiat, de operatorul p și de mărimea de ieșire, adică s'a căutat să se stabilească ecuația operațională a unui element deschis. Dacă sistemul nu se compune dintr'un singur element, ci din mai multe elemente, mărimea de ieșire a unuia dintre acestea va fi mărimea de intrare a elementului următor.

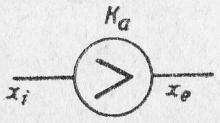


Fig. 2—10. Notația convențională a elementului de integrare.

Discutând particularitățile sistemelor de reglare automată, s'a stabilit că una dintre trăsăturile caracteristice a acestor sisteme este că acțiunea parcurge întreg circuitul închis, adică producându-se într'o oarecare porțiune a sistemului (de exemplu la obiectul de reglare), ea parcurge întreg sistemul de reglare. Dacă schema structurală oglindește în întregime particularitățile sistemului pe care-l reprezintă, atunci semnalul de comandă din schema structurală va parcurge deasemeni un circuit închis și aceasta înseamnă că semnalul dela ieșirea ultimului element trebue dat la intrarea primului element.

Deobicei, drept ultim element este considerat elementul care reprezintă, în schema structurală, obiectul de reglare. Mărimea de ieșire a acestuia este mărimea de reglare. Ca prim element se consideră elementul de măsurare, respectiv elementele care-l reprezintă. In acest caz, a închide sistemul înseamnă a aplica la elementul de măsurare mărimea de reglare. Pentru ca sistemul să poată menține mărimea de reglare constantă, este necesar ca în cazul deviațiilor acesteia dela valoarea dată, să se aplice la intrarea în primul element un impuls, astfel ales încât să producă la ieșirea din sistem o nouă variație a mărimii de reglare, însă de sens contrar în sensul micșorării deviației respective). Este deci important să se găsească ecuația operațională atât a sistemelor închise cât și a celor deschise. Studiind exemplele de întocmire a schemelor structurale, se vor stabili ecuațiile lor operaționale, atât pentru sistemul deschis cât și pentru sistemul închis. Cu ajutorul acelorași exemple, vom arăta modul de alegere a sensului mărimii de ieșire pentru închiderea sistemului.

Ca exemplificare a celor expuse, fie să se determine schema structurală a sistemului reprezentat în fig. 1—7 și să se găsească ecuația operațională a sistemelor închis și deschis.

Presupunem că avem o amplidină compensată, care poate fi reprezentată prin două elemente de relaxare. Notăm constantele lor de timp și factorii de amplificare, respectiv, cu T_1, T_2 și K_1, K_2.

Ecuația operațională a amplidinei se va scrie:

$$(1 + T_1p)\ (1 + T_2p)u_a = K_1K_2\Delta u \qquad (2-23)$$

Presupunând că:

$$\frac{1}{4\,T_r} > \frac{1}{T_m},$$

motorul poate fi reprezentat prin două elemente de relaxare, având constantele de timp T_3 și T_4, care sunt valorile inverse ale rădăcinilor ecuației (2—14), cu semnele schimbate, factorii de amplificare fiind K_3 și K_4. Prin urmare:

$$(1 + T_3p)\ (1 + T_4p)n = K_3K_4u_a. \qquad (2-24)$$

Eliminând între ecuațiile (2—23) și (2—24) pe u_a, găsim ecuația operațională a sistemului deschis :

$$(1+T_1p)\,(1+T_2p)\,(1+T_3p)\,(1+T_4p)n = K_1K_2K_3K_4\Delta u \quad (2\text{-}25)$$

Menționăm că, în acest caz, Δu nu este, deocamdată, legată de valoarea de reglare.

Pentru a se putea obține ecuația unui sistem închis, trebue să se țină seama de condiția de închidere și anume :

$$\Delta u = U_e - e_t = U_e - K_5 n \quad (2-26)$$

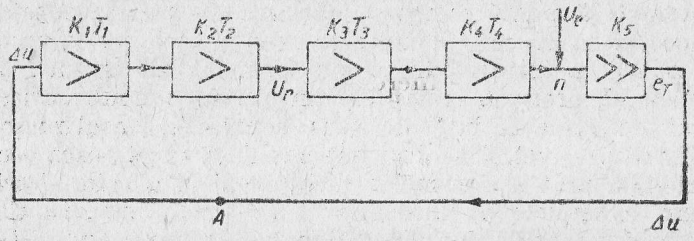


Fig. 2—11. Schema structurală a sistemului din fig. 1—10.

Eliminând între (2—25) și (2—26) pe Δu, se obține ecuația sistemului închis :

$$(1+T_1p)\,(1+T_2p)\,(1+T_3p)\,(1+T_4p)n = -K_1K_2K_3K_4(K_5n - U_e)$$

sau

$$[(1+T_{1p})\,(1+T_2p)\,(1+T_3p)\,(1+T_4p)+K_1K_2K_3K_4K_5]n = K_1K_2K_3K_4U_e \quad (2-27)$$

In fig. 2—11, este reprezentată schema structurală a sistemului de reglare din fig. 1—7.

Dacă numim „operator" raportul dintre mărimile de ieșire și de intrare ale elementului respectiv, cum s'a procedat de exemplu în cazul ecuației (1—22), rezultă din ecuația (2—27) că „operatorii" diferitelor elemente se vor multiplica, în cazul legării în serie. Această formă simplă a ecuației operaționale generale a întregului sistem se obține datorită unidirecționalității grupelor, adică datorită faptului că, în condițiile reale în circuitul de reglare, ultima grupă exercită o influență infinit mică asupra grupei anterioare.

Sistemul de reglare automată, compus dintr'un lanț de elemente legate în serie, va fi denumit sistem cu un singur contur. Din ecuația (2—25), se obține ușor ecuația caracteristicii amplitudine-fază a sistemului deschis cu un singur contur :

$$\frac{x_e}{x_i} = W_0(j\omega) = \frac{K_1K_2K_3K_4}{(1+T_1j\omega)\,(1+T_2j\omega)\,(1+T_3j\omega)\,(1+T_4j\omega)}$$

2—5. STATISMUL ȘI PRECIZIA DE REGLARE

După cum s'a văzut mai sus, la intrarea în sistemul de reglare închis se aplică diferența valorilor etalon și reglabilă (diferența mărimilor de intrare și ieșire). Notând aceste valori cu U_n, respectiv U_{n1}, se obține :

$$\Delta U_n = U_n - U_{n1}. \quad (2-28)$$

Inafară de aceasta, dacă se notează cu K și factorul total de amplificare al sistemului, produsul factorilor de amplificare ai fiecărei grupe, atunci la sistemul închis, în cazul regimului permanent se va putea scrie următoarea relație :

$$\Delta U_n K = U_n. \quad (2-29)$$

Această relație poate fi obținută din ecuația sistemului închis, dacă se presupune că $p = 0$.

Eliminând pe ΔU_{n1} între ecuațiile (2—28) și (2—29), se obține legătura dintre U_n și U_{n1}

$$U_{n1} = U_n \frac{K}{1+K}. \quad (2-30)$$

Raportul $\frac{K}{1+K}$ se numește factor de amplificare al circuitului închis.

Să definim noțiunea de statism al sistemului. Presupunem că la variația sarcinii dela zero până la valoarea ei nominală, valoarea reglabilă a variat dela U_n până la U_{n1}. Se va numi statismul sistemului, raportul :

$$S = \frac{U_n - U_{n1}}{U_n} = \frac{\Delta U_{n1}}{U_n}. \quad (2-31)$$

Din (2—29), rezultă :

$$\Delta U = \frac{U_{n1}}{K}. \qquad (2-32)$$

Inlocuind (2—32) în (2—31), se obține :

$$S = \frac{U_{n1}}{U_n K}; \qquad (2-33)$$

pe de altă parte, din (2—30), rezultă :

$$\frac{U_{n1}}{U_n} = \frac{K}{1+K}. \qquad (2-34)$$

Inlocuind valoarea $\frac{U_{n1}}{U_n}$, din ecuația (2 — 34), în ecuația (2—33), se obține următoarea expresie pentru statismul sistemului :

$$S = \frac{1}{1+K} \qquad (2-35)$$

După cum rezultă din ecuația (2—35), statismul sistemului de reglare automată este invers proporțional cu factorul de amplificare al circuitului de reglare deschis plus o unitate. In cazul unor valori suficient de mari ale factorilor de amplificare, statismul poate fi considerat ca inversul factorului de amplificare al unui circuit de reglare deschis.

Se numește grad de precizie al sistemului, raportul :

$$\eta = \frac{\Delta u}{U_n}$$

unde Δu este deviația la orice valoare a sarcinii.

Precizia de reglare poate fi judecată după statismul sistemului. Totuși, noțiunea de statism nu este identică cu noțiunea de precizie.

Să stabilim legătura dintre precizia de reglare și statismul sistemului, cu ajutorul unui exemplu de reglare a tensiunii unui generator electric. In fig. 2—12, este reprezentată caracteristica de dependență a tensiunii generatorului de curentul

de încărcare, în cazul reglării automate a tensiunii cu ajutorul unui regulator static. Să determinăm $\mathrm{tg}\alpha$:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta U_n}{I_n}. \qquad (2-36)$$

Inmulțind și împărțind raportul dat de ecuația (2—36) prin R_n, unde R_n este rezistența circuitului rotoric corespunzătoare lui U_n și I_n, adică rezistența corespunzătoare valorilor nominale ale curentului și tensiunii, se obține :

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta U_n R_n}{I_n R_n} = SR_n,$$

în care S este statismul sistemului, egal cu $\frac{1}{1+K}$.

Deviația tensiunii corespunzătoare unei sarcini oarecare este (fig. 2—12) :

$$\Delta U = I\mathrm{tg}\alpha = ISR_n = \frac{IR_n}{1+K},$$

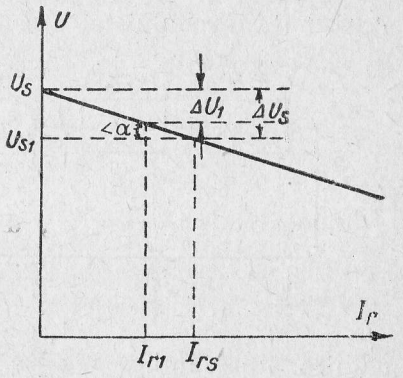


Fig. 2—12. Determinarea statismului și a preciziei.

determinându-se astfel valoarea deviației ΔU corespunzătoare unei sarcini oarecare. Dacă se exprimă precizia de reglare în procente, prin raportul dintre ΔU și U_n înmulțit cu 100, atunci, pentru orice încărcare a lui I, precizia η va fi :

$$\eta\% = \frac{\Delta U}{U_n} \cdot 100 = \frac{I}{I_n} \cdot 100\% \cdot \frac{1}{1+K}$$

Exemplu :

$$U_n = 120 \text{ V}; \; K = 100; \; I = 400 \text{ A}$$

In cazul când : $I = 0{,}75\, I_n$

$$\eta\% = 0{,}75 \cdot \frac{100}{101} \approx 0{,}75\%$$

In cazul când $I = 1{,}5\, I_n$

$$\eta = 1{,}5 \cdot \frac{100}{101} \approx 1{,}5\%.$$

După cum rezultă din exemplul de mai sus, precizia de reglare depinde de valoarea sarcinii, în timp ce statismul rămâne o valoare constantă și este complect determinat prin factorul de amplificare al circuitului deschis de reglare.

Concluziile obținute aici se referă la sistemele statice de reglare. La sistemele astatice, valoarea reglabilă se menține constantă, indiferent de valoarea sarcinii.

Inafară de faptul că factorul de amplificare determină statismul sistemului, el are o mare importanță și pentru di-

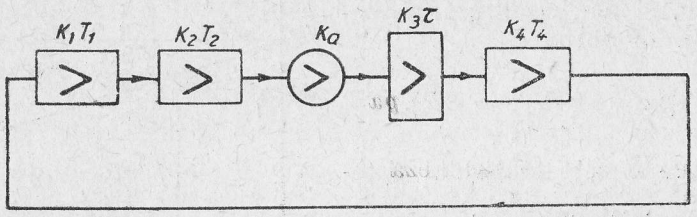


Fig. 2—13. Schema structurală a sistemului de transmitere a comenzilor din fig. 1—8.

namica procesului de reglare. Totodată, precizia sistemului de transmitere a comenzilor, în cazul unei viteze constante, se va determina prin valoarea factorului de amplificare și anume va fi invers proporțională cu acesta.

Fie de examinat sstemul de transmitere a comenzilor a cărui schemă este reprezentată în fig. 1—8. După cum se vede din schema lui structurală (fig. 2—13), sistemul se compune din trei elemente de relaxare, un element oscilator și un element de integrare.

Se deschide acest sistem și se aplică la intrarea lui un impuls de valoare constantă :

$$x_i = x_0 = \text{const.}$$

Ecuația unui sistem deschis, în cazul condițiilor indicate va fi de forma :

$$(1+T_4p)\,(1+T_1p)\,(1+T_2p)\,\left(p^2+\frac{1}{\tau}p+\omega_0^2\right)px_e = K\omega_0^2x_0 \quad (2-37)$$

Fie să se determine valoarea x_e, după un interval de timp suficient de mare, adică să se găsească soluția particulară a ecuației (2—37).

Ecuația (2—37) poate fi scrisă sub forma :

$$\left(1+T_1\frac{d}{dt}\right)\left(1+T_2\frac{d}{dt}\right)\left(1+T_4\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x_e = \int_0^t \omega_0^2 K x_0\,dt,$$

care se rezolvă printr'o singură integrare.

Soluția particulară va fi de forma :

$$px_e = Kx_0.$$

De aici rezultă că viteza de variație a mărimii de ieșire va fi proporțională cu valoarea impulsului la intrare. Coeficientul de proporționalitate va fi, în acest caz, factorul de amplificare al sistemului deschis. Cu cât factorul de amplificare este mai mare, cu atât, la aceeași valoare a lui x_0, viteza valorii de ieșire va fi mai mare. Invers, dacă viteza este dată, cu cât factorul de amplificare este mai mare, cu atât valoarea impulsului x_0, necesar pentru a se asigura viteza considerată, va fi mai mică.

După cum s'a văzut din exemplul considerat al sistemului de transmitere a comenzilor (fig. 1—8), unghiul de divergență dintre selsinul emițător și selsinul receptor va reprezenta mărimea de intrare, iăr unghiul de rotație a arborelui motorului va reprezenta mărimea de ieșire. Cu cât factorul de amplificare este mai mare, cu atât va fi nevoie de un unghi de divergență mai mic pentru a se asigura o viteză dată, constantă, de transmitere a comenzilor. Unghiul de divergență dintre selsinul emițător și selsinul receptor, când viteza de transmitere a comenzilor este constantă, se numește eroare dinamică stabilizată. Dacă factorul de amplificare reprezintă raportul dintre viteza mărimii de ieșire și unitatea de impuls la ieșire, atunci prin eroare dinamică se înțelege valoarea inversă a factorului de amplificare.

Valoarea factorului de amplificare influențează și dinamica de reglare automată a sistemelor statice și astatice. Această problemă va fi studiată în capitolele care urmează.

CAPITOLUL III

STABILITATEA SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

Sistemele de reglare automată trebue să satisfacă o serie de condiții, care determină folosirea lor într'un caz sau altul.

Una dintre aceste condiții este precizia de reglare statică. Dacă s'ar examina numai statica procesului de reglare, s'ar putea obține orice grad de precizie de reglare, oricare ar fi sistemul. Ar fi necesar numai să se aleagă un factor de amplificare a sistemului suficient de mare. Insă, după cum s'a stabilit mai sus, sistemele de reglare automată sunt sisteme dinamice. Deaceea, este insuficient a se judeca un sistem după caracteristicile lui statice. Pentru a se avea o imagine complectă a sistemelor de reglare, trebue să se studieze și proprietățile lor dinamice. Cele mai importante condiții dinamice pe care trebue să le îndeplinească sistemul de reglare sunt :

1 . Sistemul trebue să fie stabil.

2. Valoarea noii reglări nu trebue să depășească valoarea dată anterior.

3. Durata de reglare nu trebue să depășească o valoare oarecare dată.

4. Numărul oscilațiilor mărimii de reglare, în timpul procesului de reglare, nu trebue să depășească o anumită valoare, dinainte stabilită.

Ultimele trei condiții pot varia în funcție de scopul și condițiile de funcționare ale instalației, iar unele dintre ele pot fi, în anumite cazuri, chiar nerealizabile ; dar toate sistemele de reglare automată, fără excepție, trebue să satisfacă condiția de stabilitate. Din aceste motive, se acordă o atenție deosebită stabilității sistemului.

Să precizăm, înainte de toate, noțiunea de stabilitate, al cărei sens adevărat a fost stabilit de A. M. Liapunov. Se numește *sistem stabil*, sistemul care, fiind scos din starea de echilibru și lăsat de sine stătător, tinde, după un oarecare interval de timp, să revină la starea inițială de echilibru.

Presupunem că în starea de stabilitate, mărimea de reglare are o valoare oarecare x_0. Să scoatem sistemul din această stare, cu ajutorul unei acțiuni exterioare oarecare, în așa fel ca x_0 să varieze cu $\delta(t)$, înlăturând apoi cauza care produce

schimbarea menționată. Conform celor stabilite, sistemul va deveni stabil dacă :

$$\lim_{t \to \infty} \delta(t) \to 0 \qquad (\alpha)$$

Dacă condiția (α) nu se realizează, sistemul va fi nestabil.

Să arătăm prin ce se determină stabilitatea sau nestabilitatea sistemului de reglare automată. Presupunem că variația unei mărimi oarecare, în sistemul de reglare automată, este reprezentată printr'o ecuație diferențială de ordinul n cu coeficienți constanți.

Variația $\delta(t)$ va rezulta, deasemeni, dintr'o ecuație diferențială de ordinul n.

In concordanță cu definiția dată, stabilitatea sistemului se determină prin caracterul mișcării libere a sistemului. Intrucât mișcarea liberă este reprezentată printr'o ecuație diferențială omogenă (fără membrul al doilea), pentru determinarea stabilității sistemului este suficient să se examineze metodele de rezolvare ale ecuației diferențiale omogene.

In cazul general, pentru un sistem de ordinul n, ecuația diferențială care reprezintă modul de variație a deviației $\delta(t)$ a valorii de reglare este următoarea :

$$a_0 \frac{d^n \delta}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \delta}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n \delta = 0, \qquad (\beta)$$

unde $a_0, a_1 \ldots . a_n$ sunt constante ale căror valori depind de parametrii sistemului de reglare.

După cum se știe, soluția ecuației (β) poate fi exprimată prin relația :

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{z_i t}, \qquad (\gamma)$$

în care A_i sunt constantele de integrare, care se determină din condițiile inițiale, și

z_i — rădăcinile ecuației caracteristice [1]) de forma :

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (\delta)$$

[1]) Presupunem că nu avem rădăcini multiple. Această limitare nu este restrictivă, întrucât o variație oricât de mică a rădăcinii nu modifică, practic proprietățile sistemului, deci rădăcinile multiple pot fi înlocuite prin rădăcini diferite, destul de apropiate de cele multiple.

Să examinăm soluția (γ) din punct de vedere al stabilității de reglare. Conform definiției, ca un sistem să fie stabil, trebue ca $\delta(t) \to 0$ în cazul când $t \to \infty$. Această condiție este posibilă numai dacă toate componentele expresiei (γ) tind cu timpul spre zero.

In soluția (γ), toți coeficienții A_i au valori constante, deaceea caracterul fiecărei componente $A_i e^{z_i t}$ va depinde de z_i. De exemplu, dacă z_i este un număr real și pozitiv, $A_i e^{z_i t}$ va crește cu timpul la infinit, deci $\delta(t)$ va crește deasemenea la ∞. Invers, dacă z_i este un număr real și negativ, $A_i e^{z_i t}$ va tinde spre zero.

Insfârșit, dacă z_i este un număr complex :

$$z = x \pm jy,$$

atunci

$$A_1 e^{(\alpha + j\omega)t} + A_2 e^{(\alpha - j\omega)t} = A e^{\alpha t} \sin (\gamma t + \varphi).$$

Acesta este un fenomen oscilatoriu, a cărui amplitudine A va crește sau va scădea, în funcție de semnul părții reale a rădăcinii. Dacă partea reală a rădăcinii va fi pozitivă, se obține un fenomen oscilatoriu cu valoarea amplitudinii crescândă. Dacă însă partea reală a rădăcinii este negativă, amplitudinea oscilațiilor va tinde spre zero. Din cele ce preced, rezultă următoarea condiție de stabilitate :

Pentru ca sistemul de reglare automată, reprezentat printr'o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, să fie stabil, este necesar și suficient ca rădăcinile reale ale ecuației caracteristice obținute din ecuația diferențială arătată, să fie negative, iar rădăcinile complexe să aibă partea reală negativă.

In felul acesta, studiul stabilității se rezumă la determinarea semnului părții reale a rădăcinilor ecuației caracteristice.

Este evident că s'ar putea trage ușor concluzia asupra stabilității unui sistem, dacă s'ar calcula valorile rădăcinilor ecuației caracteristice. Studiul stabilității de reglare automată cu ajutorul rădăcinilor ecuației caracteristice este legat însă de foarte mari dificultăți. După cum se știe din algebră, numai rădăcinile ecuațiilor de gradul întâi și doi pot fi determinate destul de ușor. Ecuațiile de gradele trei și patru pot fi deasemenea rezolvate cu ajutorul unor formule cunoscute, care sunt însă destul de complicate. In ceeace privește ecuațiile generale al

căror grad este mai mare de patru, rădăcinile acestora nu pot fi determinate decât cu ajutorul unor metode aproximative, printr'o serie de calcule dificile. Afară de aceasta, pentru determinarea rădăcinilor trebue să se cunoască valoarea numerică a coeficienților ecuației, deci valorile numerice ale tuturor parametrilor sistemului. Dacă una dintre perechile de rădăcini va avea o parte reală pozitivă sau o rădăcină reală care să fie un număr pozitiv, întregul sistem va fi nestabil. Pentru ca sistemul să poată fi făcut stabil, trebue să se schimbe, într'un mod oarecare, coeficienții ecuației. Intrucât nu se poate exprima într'o formă generală legătura dintre rădăcinile ecuației și parametrii sistemului, este destul de dificil să se stabilească în ce măsură trebue modificat sistemul, sau diferiții lui parametri, pentru ca să devină stabil. Toate acestea au dus la stabilirea unui șir de criterii, care permit să se determine condițiile de stabilitate fără a se recurge la calculul rădăcinilor ecuației caracteristice.

3—1. CRITERIILE DE STABILITATE ALE ROUTH-HURWITZ

Să examinăm ecuația caracteristică de gradul întâi :

$$a_0 z + a_1 = 0 \qquad (3-1)$$

Rădăcina ecuației (3—1) va fi :

$$z_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$

z_1 fiind un număr real, el va fi negativ dacă a_0 și a_1 sunt pozitive.

In acest caz simplu, condiția necesară și suficientă de stabilitate este ca ecuația să aibă coeficienți reali și pozitivi.

Presupunând că $a_0 > 0$, condiția de stabilitate a ecuației de gradul întâi se reduce la $a_1 > 0$.

Să examinăm ecuația caracteristică de gradul doi :

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0. \qquad (3-2)$$

Rădăcinile acestei ecuații se determină cu formula binecunoscută :

$$z_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{a_2}{a_0}};$$

în cazul când

$$a_1^2 - 4a_0a_2 > 0,$$

rădăcinile ecuației (3—2) sunt reale. Ele vor fi negative dacă

$$a_1 > 0 \text{ și } a_0a_2 > 0,$$

deoarece numai în această condiție, expresia de sub radical va fi mai mică decât valoarea $\frac{a_1}{2a_0}$.

Dacă $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$, ceeace este posibil dacă $a_2 > 0$, rădăcinile ecuației (3—2) vor fi complexe și conjugate. In acest caz, partea reală va fi negativă dacă $a_1 > 0$.

In felul acesta, pentru cel de al doilea caz, condiția necesară și suficientă de stabilitate este ca toți coeficienții ecuației să fie pozitivi:

$$a_0 > 0\,;\ a_1 > 0\,;\ a_2 > 0.$$

Să examinăm ecuația caracteristică de gradul trei:

$$a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0 \qquad (3—3)$$

Se presupune că toți coeficienții ecuației (3—3) au valori pozitive:

$$a_0 > 0\,;\ a_1 > 0\,;\ a_2 > 0\,;\ a_3 > 0.$$

Intrucât la ecuațiile cu coeficienții reali, rădăcinile complexe sunt perechi conjugate, la ecuațiile de grad impar va exista întotdeauna cel puțin o rădăcină reală. Prin urmare, în cazul studiat, vom avea cel puțin o singură rădăcină reală Intrucât toți coeficienții ecuației au fost considerați pozitivi, rădăcina reală nu poate fi pozitivă, deoarece niciunul dintre numerele pozitive nu poate anula ecuația. Rezultă, deci, că nestabilitatea sistemului, în cazul de față, se va datora numai faptului că partea reală a rădăcinilor complexe este pozitivă.

Limita de stabilitate se obține atunci când partea reală a perechii de rădăcini complexe este egală cu zero. Aceasta va avea loc când rădăcinile ecuației (3—3) vor fi de forma $z = \pm j\omega$. Să determinăm valoarea coeficienților, în cazul când rădăcinile complexe sunt situate pe axa imaginară (limita de stabilitate). Inlocuind, în ecuația (3—3), pe z cu $j\omega$, se obține:

$$a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2(j\omega) + a_3 = 0.$$

Ținând seama că $j^2 = -1$, iar $j^3 = -j$ și separând părțile reale de cele imaginare, se obține:

$$a_3 - a_1\omega^2 + j\omega(a_2 - a_0\omega^2) = 0. \qquad (3—4)$$

Ecuația (3—4) va fi satisfăcută numai în cazul când părțile imaginare și reale, fiecare în parte, vor fi egale cu zero, pentru o aceeași valoare a lui ω. Prin urmare, vor trebui să fie satisfăcute condițiile:

$$a_3 - a_1\omega^2 = 0 \qquad (3—5)$$

$$\omega(a_2 - a_0\omega^2) = 0 \qquad (3—6)$$

Din ecuația (3—6), se obțin două condiții:

$$\omega = 0 \qquad (3—7)$$

și

$$\omega^2 = \frac{a_1}{a_0}. \qquad (3—8)$$

Inlocuind aceste valori în ecuația (3—5), se obține pentru ecuația (3—7):

$$a_3 = 0. \qquad (3—9)$$

Inlocuind (3—8) în (3—5), se obține:

$$a_3 - a_1\frac{a_2}{a_0} = 0$$

sau

$$a_1a_2 - a_0a_3 = 0. \qquad (3—9')$$

Condiția (3—9) corespunde cazului când rădăcina reală este egală cu zero. Această condiție se numește uneori *limita stabilității aperiodice*. Intrucât s'a considerat că toți coeficienții ecuației, printre care și a_3, sunt pozitivi, condiția (3—9) nu interesează. Rezultă deci că, în aceste condiții, regimul de stabilitate va fi dat de relațiile (3—5) și (3—9').

Nesatisfacerea egalității (3—9') duce la faptul că partea reală a rădăcinii complexe poate deveni pozitivă (sistemul este nestabil) sau negativă (sistemul este stabil). Numai ultimul caz interesează. Să arătăm că dacă inegalitatea:

$$a_1a_2 - a_3a_0 > 0 \qquad (3—10)$$

este satisfăcută, rădăcinile ecuației se vor găsi în stânga axei imaginare.

Intr'adevăr, se prseupune că $a_0 = 0$; ecuația (3—3) se transformă în ecuația de gradul doi:

$$a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0,$$

care, conform ecuației (3—3), trebue să satisfacă condiția:

$$a_1 a_2 > 0. \qquad (3-11)$$

Se presupune că a_0 este mic, dar diferit de zero; în acest caz, pentru ecuația de gradul trei avem:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0.$$

Ținând seama de legătura care există între coeficienții și rădăcinile unei ecuații algebrice, rezultă că la variații mici ale coeficienților ecuației, dacă a_0 diferă de zero și are o valoare mică și dacă este satisfăcută conditia (3 — 11), pentru ca ambele rădăcini complexe conjugate să fie situate în partea stângă a axei imaginare, coeficienții trebue să satisfacă relația:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \qquad (3-12)$$

Această condiție este condiția suplimentară de stabilitate. In felul acesta, dacă $a_0 > 0$ și este îndeplinită condiția (3—12), nu este necesar să se determine rădăcinile, ci putem fi siguri că dacă rădăcinile sunt reale ele vor fi și negative, iar dacă ele sunt complexe, partea lor reală este negativă, deci sistemul este stabil.

Criteriul lui Routh-Hurwitz dă condițiile pe care trebue să le satisfacă coeficienții unei ecuații de orice grad, pentru ca partea reală a rădăcinilor să fie negativă. Fără a se da vreo demonstrație, se va arăta în cele ce urmează în ce constă criteriul lui Routh-Hurwitz [1]).

Presupunem, în cazul general, că ecuația caracteristică are forma:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0. \qquad (3-13)$$

[1]) Demonstrația criteriului lui Routh-Hurwitz este destul de complicată. Această demonstrație poate fi găsită în cursuri speciale de matematici superioare. V., de exemplu: Kuros „Curs de algebră superioară".

Criteriul de stabilitate al lui Routh-Hurwitz se formulează astfel: Pentru ca toate rădăcinile ecuației (3—13) să aibă partea reală negativă (adică pentru ca sistemul să fie stabil), este necesar și suficient ca, în cazul când $a_0 > 0$, toți determinanții minori principali, în diagonală, ai determinantului:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots a_n \end{vmatrix} \qquad (3-14)$$

format din coeficienții ecuației, să fie mai mari decât zero.

Pentru a ilustra acest lucru, să examinăm ecuația de gradul trei:

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0, \qquad (3-15)$$

presupunând că $a_0 > 0$. Intocmim un tabel, după modelul (3—14). In cazul ecuației de gradul trei (3—15), el va fi de forma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

Determinanții în diagonală vor fi:

$$a_1 > 0; \qquad (3-16)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \qquad (3-17)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0$$

sau, ținând seama de (3—17), rezultă:

$$a_3 > 0. \qquad (3-18)$$

Comparând condițiile de stabilitate a ecuației de gradul trei examinate mai sus [condițiaia (3—10)], se constată că aceste condiții coincid cu condițiile (3—16) — (3—18), când $a_0 > 0$.

De remarcat faptul că limita de stabilitate determinată mai sus, $a_1a_2 - a_0a_3 = 0$, corespunde relației date de determinantul lui Routh-Hurwitz de ordinul $n-1$, egalată cu zero.

Pentru ecuația (3—15), limita stabilității se determină din condiția:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 = 0$$

Să aplicăm criteriul Routh-Hurwitz la ecuația de gradul patru. Avem:

$$a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 0.$$

Presupunând că $a_0 > 0$, se întocmește tabela, scriind toți determinanții lui Routh-Hurwitz; se obține:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

Determinanții în diagonală vor fi:

1) $$a_1 > 0; \qquad (3—19)$$

2) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \qquad (3—20)$$

3) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2a_0 > 0. \qquad (3—21)$$

4) $$a_4 > 0,$$

când $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $a_2 > 0$; $a_3 > 0$; $a_4 > 0$.

Este ușor de văzut că pentru această ecuație, condiția suplimentară va fi (3—21), întrucât (3—20) reprezintă o parte din condiția (3—21).

3—2. FOLOSIREA CRITERIULUI LUI ROUTH-HURWITZ LA STUDIUL STABILITĂȚII SISTEMELOR DE REGLARE

Să studiem stabilitatea sistemului de reglare automată a tensiunii generatorului electric, reprezentat în fig. 3—1. Sistemul funcționează după următorul principiu. Excitația generatorului reglabil este alimentată dela o amplidină (AMPL). Amplidina are două înfășurări de excitație *1* și *2*. Înfășurarea *1* este alimentată dela o sursă separată de curent, producând un flux magnetic constant. Înfășurării *2* i se aplică diferența dintre tensiunile de reglare și etalon. In acest caz, fluxul magnetic din înfășurarea *2* este dirijat în sens invers fluxului magnetic din înfășurarea *1*. Diferența dintre aceste fluxuri magnetice creează un flux magnetic rezultant dealungul axei longitudinale a amplidinei, flux care, la o anumită valoare a sarcinii date, asigură valoarea dată a tensiunii generatorului. Să presupunem că în urma variației sarcinii se schimbă și tensiunea generatorului; în acest caz se schimbă și diferența dintre tensiunea etalon U_e și tensiunea U a generatorului. Acest fapt duce la o variație a fluxului din înfășurarea *2*, din care rezultă variația fluxului rezultant din înfășurarea de excitație a amplidinei. La conectarea corectă a înfășurărilor *1* și *2*, variația arătată a rezultantei fluxurilor magnetice trebue să ducă la restabilirea tensiunii reglabile, a cărei precizie este determinată de parametrii sistemelor.

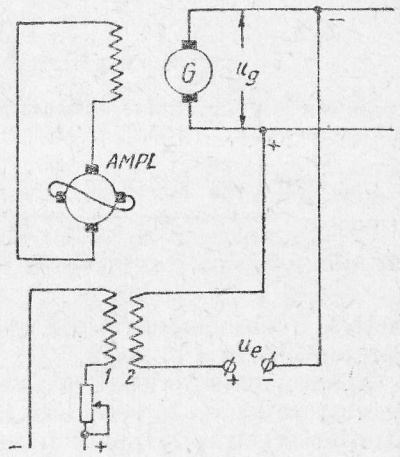


Fig. 3—1. Schema de principiu a sistemului de reglare a tensiunii.

Intocmim, înainte de toate, schema structurală a sistemului de reglare. Dacă se consideră că reacțiunea longitudinală a indusului amplidinei este în întregime compensată, sistemul poate fi reprezentat prin două elemente de relaxare legate în serie, având constanele de timp T_1 și T_2 și factorii de amplificare K_1 și K_2. Generatorul este reprezentat printr'un element de relaxare având constanta de timp T_3 și factorul de amplificare K_3.

Pentru simplificare, se presupune că generatorul debitează pe o rezistență pur ohmică [1]) și se neglijează reactanța in-

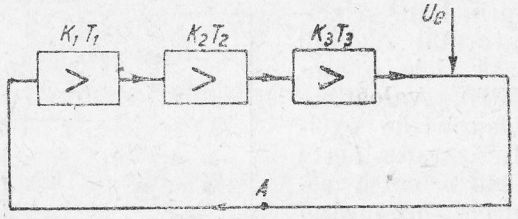


Fig. 3—2. Schema structurală a sistemului din fig. 3—1.

ductivă a circuitului rotoric. Schema structurală descrisă este reprezentată în fig. 3—2.

Ecuația caracteristică a sistemului compus din trei grupe de relaxare legate în serie este reprezentată prin produsul operatorilor acestora și poate fi scrisă :

$$(1 + T_1p)(1 + T_2p)(1 + T_3p) + K_1K_2K_3 = 0. \quad (3-22)$$

Se presupune că, constantele de timp au următoarele valori : $T_1 = 0{,}005$ s, $T_2 = 0{,}05$ s, $T_3 = 0{,}5$ s. Să determinăm valoarea maximă a factorului total de amplificare la care sistemul rămâne stabil.

Deschizând parantezele ecuației (3—22), se obține :

$$T_1T_2T_3p^3 + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) + K_1K_2K_3 + 1 = 0 \quad (3-23)$$

[1]) Considerarea rezistenței de încărcare duce numai la variația factorului de amplificare K_3.

Identificând ecuația caracteristică obținută cu (δ), rezultă :

$$a_0 = T_1T_2T_3,$$
$$a_1 = T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3,$$
$$a_2 = T_1 + T_2 + T_3,$$
$$a_3 = 1 + K_1K_2K_3.$$

Toți coeficienții ecuației (3—23) au valori reale și pozitive. Conform ecuației (3—17), condiția Routh-Hurwitz se va scrie :

$$a_1a_2 - a_0a_3 = (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - T_1T_2T_3(1 + K_1K_2K_3) > 0.$$

Să determinăm valoarea factorului total de amplificare pentru care sistemul va fi la limita de stabilitate. Pentru orice valoare mai mică decât factorul total de amplificare, sistemul va fi stabil și problema propusă va fi rezolvată. Conform ecuației (3—9), sistemul se va afla la limita stabilității în cazul când :

$$a_1a_2 - a_0a_3 = (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - T_1T_2T_3(1 + K_1K_2K_3) = 0,$$

de unde rezultă valoarea limită a factorului total de amplificare :

$$K_1K_2K_3 = \frac{T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3}{T_1T_2T_3}(T_1 + T_2 + T_3) - 1 = \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right)(T_1 + T_2 + T_3) - 1.$$

In cazul sistemului examinat,

$$K_1K_2K_3 = \left(\frac{1}{0{,}005} + \frac{1}{0{,}05} + \frac{1}{0{,}5}\right)(0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005) - 1 = 122.$$

Dacă factorul total de amplificare este mai mare decât 122, sistemul va fi nestabil ; dacă el este mai mic decât 122, sistemul va fi stabil și dacă factorul de amplificare este egal cu 122, sistemul se va afla la limita de stabilitate. Această valoare a factorului de amplificare a sistemului se numește valoarea critică sau valoarea limită.

3—3. CRITERIUL AMPLITUDINE-FAZĂ

Criteriul lui Routh-Hurwitz se aplică destul de simplu în cazul sistemelor ale căror procese de funcționare sunt reprezentate prin ecuații de grad mic. In cazul când ecuația este de gradul 5 sau mai mare, folosirea criteriului lui Routh-Hurwitz devine destul de dificilă. Dificultățile cresc și mai mult dacă trebue să se stabilească influența vreunuia dintre parametri asupra stabilității procesului, deoarece condițiile de stabilitate se exprimă printr'o combinație destul de complicată a coeficienților ecuației, iar aceștia din urmă, la rândul lor, sunt funcții complicate ale parametrilor sistemului respectiv. In asemenea cazuri, este mult mai practic să se examineze stabilitatea sistemului cu ajutorul criteriului care rezultă din caracteristica amplitudine-fază a unui circuit de reglare deschis (criteriul amplitudine-fază se numește și criteriul lui Nyquist). Din punct de vedere matematic, acest criteriu nu prezintă nimic nou, el fiind o consecință a bine cunoscutei teoreme a lui Cauchy. Esențial este faptul că, criteriul amplitudine-fază permite examinarea stabilității sistemelor închise prin folosirea proprietăților unui sistem deschis, ceeace simplifică considerabil calculele. Totodată, acest criteriu permite determinarea stabilității sistemului de reglare închis cu ajutorul caracteristicii ridicate experimental a sistemului deschis.

Din aceste motive, precum și din alte câteva considerente despre care se va trata mai jos, criteriul de stabilitate amplitudine-fază are astăzi o utilizare atât de vastă. Fără a intra în amănunte, să cercetăm principiile matematice ale acestui criteriu dde stabilitate.

Să presupunem că ecuația circuitului deschis al sistemului de reglare este de forma :

$$Q(p)x_e = R(p)x_i,$$

unde $Q(p)$ și $R(p)$ sunt polinoamele care depind de p, gradul polinomului $Q(p)$ fiind mai mare sau cel mult egal cu gradul $R(p)$. Inlocuind $x_e = -x_i$, se obține ecuația unui sistem închis care are forma :

$$[Q(p) + R(p)]x_e = 0.$$

Pentru ca sistemul să fie stabil, este necesar și suficient ca rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului :

$$Q(p) + R(p) = 0 \qquad (3-24)$$

să aibe termeni reali și negativi.

Rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienți constanți și reali pot fi sau numere reale sau numere complexe conjugate. Rădăcinile ecuațiilor algebrice pot fi reprezentate prin puncte situate în planul de variabilă complexă :

$$z = \alpha + j\beta .$$

In acest caz, rădăcina este reală și pozitivă dacă

$$\beta = 0,$$

iar

$$z = \alpha,$$

și este un număr imaginar când :

$$\alpha = 0,$$

iar

$$z = j\beta .$$

In general, valoara rădăcinii se determină prin coordonatele (α, β) ale punctului din planul z.

Condiția de stabilitate se caracterizează prin aceea că toate rădăcinile ecuației caracteristice trebue să fie situate în partea stângă a axei imaginare din planul complex al rădăcinilor z.

Să presupunem că rădăcinile polinomului $Q(p)$, care este ecuația caracteristică a ecuației diferențiale corespunzătoare circuitului deschis al sistemului de reglare, sunt situate în partea stângă a axei imaginare. Aceasta înseamnă că sistemul în stare deschisă este stabil.

Impărțind relația (3—24) cu $Q(p)$, se obține următoarea fracție rațională având numărătorul și numitorul polinoame de p :

$$\frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} = 0, \qquad (23-25)$$

la care rădăcinile numitorului (aceste rădăcini se numesc polii fracției raționale) sunt situate în partea stângă a axei imaginare. Pentru studiul stabilității, ne interesează poziția pe care o

ocupă rădăcinile funcției (3—25). Aceste rădăcini se numesc zerourile fracției raționale.

Notând rădăcinile numitorului (3—25) respectiv prin $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $\bar{z}_3$, ... $\bar{z}_n$, iar rădăcinile numărătorului prin z_1, z_2, z_3, ... z_n, ecuația (3—25) poate fi pusă sub forma :

$$\frac{Q(p)+R(p)}{Q(p)} = 1 + \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots.(p-z_n)}{(p-\bar{z}_1)(p-\bar{z}_2)\ldots.(p-\bar{z}_n)} \quad (3-26)$$

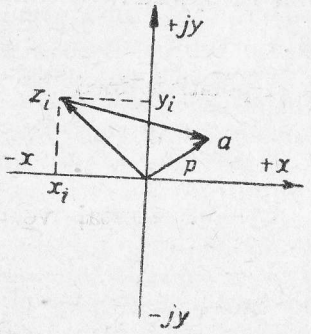


Fig. 3—3. Diagrama vectorială a factorului $(p-z_i)$ din (3—26)

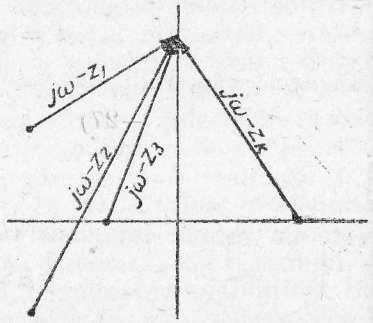


Fig. 3—4. Așezarea rădăcinilor în planul variabilei complexe.

In planul rădăcinilor, adică în planul variabilei complexe z, fiecărei valori a rădăcinii îi corespunde un punct a cărui abscisă este egală cu partea reală a rădăcinii, iar ordonata respectivă, cu partea imaginară. Prin urmare, în planul rădăcinilor, fiecărei poziții ocupate de diversele rădăcini îi corespunde un vector trasat din originea axelor de coordonate până în punctul ale cărui coordonate sunt determinate prin valoarea rădăcinii z_i (fig. 3—3). Dacă se alege valoarea lui p într'un punct oarecare din plan, de exemplu în punctul a fig. (3—3), diferenței $(p-z_i)$ îi corespunde un vector egal cu diferența vectorilor z_i și p. Dacă vom da lui p valori pur imaginare, ecuația (3—26) va putea fi scrisă :

$$K(j\omega) = 1 + \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)\ldots.(j\omega-z_n)}{(j\omega-\bar{z}_1)(j\omega-\bar{z}_2)\ldots.(j\omega-\bar{z}_n)} \quad (3-27)$$

In fig. 3—4, sunt reprezentați vectorii corespunzători factorilor numărătorului (3—27). In mod analog, pot fi reprezentați și factorii numitorului.

Dacă ω va lua toate valorile dela $-\infty$ până la $+\infty$, fiecare vector $j\omega - z_i$ se va roti cu un unghi egal $\pm\pi$. Considerând că vectorul se rotește în sens invers axelor ceasornicului, la o variație a lui ω dela $-\infty$ până la $+\infty$, pentru fiecare rădăcină situată în partea stângă a axei imaginare, la o rotație a vectorului $j\omega - z_i$, corespunde unghiul pozitiv $+\pi$, iar pentru fiecare dintre rădăcinile situate în partea dreaptă a axei imaginare, corespunde valoarea $-\pi$.

Numărătorul fracției (3—27) reprezintă un vector al cărui modul este egal cu produsul dintre modulele vectorilor reprezentând factorii $(j\omega - z_i)$ și al cărui argument este egal cu suma argumentelor vectorilor reprezentând factorii dela numărător. Numitorul fracției (3—27) reprezintă deasemenea un vector, al cărui modul este egal cu produsul modulelor vectorilor și al cărui argument este egal cu suma argumentelor vectorilor reprezentând factorii numitorului. In felul acesta, vectorul $K(j\omega)$ reprezintă câtul rezultat din împărțirea a doi vectori. Modulul acestui cât, după cum se știe, este egal cu câtul rezultat din împărțirea modulelor vectorilor numărătorului și numitorului. Argumentul acestuia se determină prin diferența argumentelor numărătorului și numitorului.

Să presupunem că sistemul de reglare automată studiat este reprezentat printr'o ecuație de ordinul n.

Ținând seama de faptul că modulul lui $Q(p)$ este mai mare decât modulul lui $R(p)$ și că toate cele n rădăcini ale lui $Q(p)=0$ sunt situate în partea stângă a axei imaginare, în cazul variației lui ω dela $-\infty$ până la $+\infty$ vectorul $Q(j\omega)$ va avea argumentul πn.

Gradul numărătorului fracției (3—27) este deasemeni egal cu n. Toate rădăcinile numărătorului vor fi deasemenea situate în partea stângă a axei imaginare, dacă argumentul acestor vectori, în cazul variației lui ω dela $-\infty$ la $+\infty$ va fi egal cu πn. Se obține astfel următoarea condiție simplă, de a cărei îndeplinire depinde ca, toate rădăcinile ecuației caracteristice să fie situate în stânga axei imaginare : dacă rădăcinile polinomului $Q(p) = 0$ sunt situate în partea stângă a axei imaginare, rădăcinile ecuației :

$$Q(p) + R(p) = 0$$

vor fi deasemenea aşezate în partea stângă a axei imaginare, când argumentul vectorului:

$$K(j\omega) = 1 + \frac{R(i\omega)}{Q(j\omega)} \qquad (3-28)$$

este egal cu 0 în cazul când ω variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

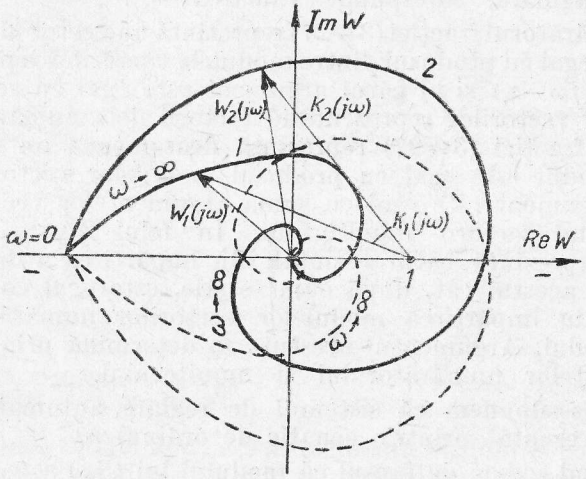


Fig. 3—5. Caracteristica amplitudine-fază a unui sistem deschis.

Din punct de vedere geometric, această condiţie înseamnă că originea axelor de coordonate, care este şi originea vectorului (3—28), trebue să fie situată în afara curbei locului geometric a extremităţii vectorului (3—28).

In locul vectorului $K(j\omega)$, putem examina vectorul:

$$W(j\omega) = -\frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)};$$

în acest caz, originea vectorului va fi în punctul $(+1, j0)$ (fig. 3—5) şi nu în originea axelor de coordonate. Sistemul va fi stabil dacă punctul $(+1, j0)$ va fi situat în afara curbei (curba *1*, din fig. 3—5) şi sistemul va fi nestabil dacă punctul

$(1, j0)$ va fi cuprins de curba locului geometric al vârfurilor vectorului $W(j\omega)$ (curba *2*, fig. 3—5).

In fig. 3—5, este reprezentat printr'o linie continuă hodograful vectorului $W(j\omega)$ în cazul când frecvenţa variază dela 0 la ∞ şi printr'o linie punctată, hodograful acestui vector la o variaţie a frevcenţei dela $-\infty$ până la zero. Intrucât în cazul sistemelor de reglare studiate aici, locul geometric al vârfurilor vectorului $W(j\omega)$, pentru variaţia frecvenţei dela $-\infty$ până la zero, este conjugatul locului geometric al vârfurilor vectorului $W(j\omega)$ pentru variaţia frecvenţei dela zero până la ∞, în general este suficient să se traseze locul vectorului $W(j\omega)$ numai pentru variaţia frecvenţei ω dela 0 până la ∞.

Regula enunţată constitue criteriul de stabilitate amplitudine-fază.

Locul geometric al vârfurilor vectorului $W(j\omega)$ se numeşte *caracteristica amplitudine-fază* a circuitului deschis de reglare. Această denumire este destul de explicită, întrucât, după cum rezultă din (3—24),

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{x_e}{x_i}$$

este raportul dintre mărimea de ieşire şi mărimea de intrare a sistemului deschis, când la intrare se aplică un impuls sinusoidal de amplitudine constantă şi frecvenţă variind dela zero până la infinit.

De aici rezultă o metodă de cercetare pe cale experimentală a stabilităţii sistemului. In acest scop, este necesar să deschidem sistemul şi să ne convingem că în această situaţie sistemul este stabil; se aplică apoi un impuls de amplitudine constantă şi frecvenţă variabilă. Pentru orice valoare a frecvenţei, trebue măsurat modulul şi argumentul mărimii de ieşire şi aceste valori trebue trecute în planul $W(j\omega)$. Sistemul în stare închisă va fi stabil dacă punctul $(-1, j0)$ va fi situat în afara acestei curbe.

In cele ce preced, s'a examinat cazul când toate rădăcinile polinomului $Q(p)$ sunt situate în partea stângă a axei imaginare; acest criteriu este însă valabil şi pentru cazul când $Q(p)$ are o singură rădăcină egală cu zero [1]).

[1]) In acest caz, curba se complectează cu un semicerc de rază infinit mare şi se verifică dacă punctul $(1, j0)$ este situat în afara acestei curbe.

3—4. EXEMPLE

a) Fie un sistem format dintr'un element de relaxare având constanta de timp T și factorul de amplificare K. Ecuația acestui element, după cum se știe, este de forma :

$$(1 + Tp)x_e = Kx_i$$

sau :

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{K}{1 + Tp} = W(p).$$

Uneori se pune în fața ecuației operaționale semnul — (minus), pentru a se controla gradul de stabilitate în raport cu poziția ocupată de punctul $(1,j0)$. Dacă nu se ține seama de acest semn, gradul de stabilitate se stabilește cu ajutorul punctului $(-1,j0)$. In cele ce urmează, vom utiliza prima dintre metodele indicate, obținând :

$$W(p) = -\frac{K}{1 + Tp}.$$

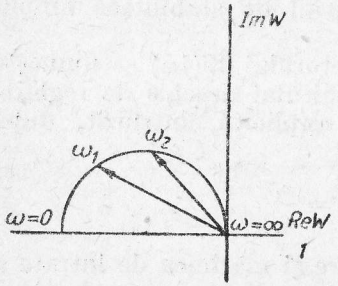


Fig. 3—6. Caracteristica amplitudine-fază, a sistemului reprezentat prin ecuațiile de gradul întîi

Pentru a se putea trasa caracteristica amplitudine-fază, trebue să se înlocuiască p prin $j\omega$ și să se traseze curba $W(j\omega)$, variindu-se ω dela 0 la ∞. In fig. (3—6), este reprezentată caracteristica amplitudine-fază pentru cazul când $W(j\omega) = -K$ pentru $\omega = 0$ și $W(j\omega) = 0$ pentru $\omega = \infty$. Unghiul maxim de rotație al vectorului este egal cu $\frac{\pi}{2}$ pentru $\omega \to \infty$. Caracteristica amplitudine-fază a unui astfel de sistem (a grupei de relaxare) nu va putea cuprinde niciodată punctul $(1,j0)$; prin urmare, această caracteristică fiind închisă, sistemul va fi totdeauna stabil.

b) Dacă sistemul este deschis, el este reprezentat prin ecuația :

$$(a_0p^2 + a_1p + 1)x_e = Kx_i, \qquad (3—29)$$

în care se presupune că $a_0 > 0$ și $a_1 > 0$.

Acestei ecuații îi corespunde un sistem compus dintr'un element oscilator și din două elemente de relaxare legate în serie.

Din (3—29), rezultă :

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{K}{a_0p^2 + a_1p + 1}$$

și

$$W(j\omega) = -\frac{K}{a_0(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + 1}.$$

In fig. (3—7), este reprezentată caracteristica amplitudine-fază a următorului sistem :
$W(j\omega) = -K$, în cazul când $\omega = 0$, și $W(\infty) = 0$, pentru $\omega = \infty$. Argumentul vectorului va avea pentru $\omega \to \infty$ valoarea maximă, egală cu π. Se vede ușor că punctul $(1, j0)$, corespunzător valorilor a,b și K, nu se va afla pe caracteristica amplitudine-fază și nici în interiorul acesteia. In consecință, acest sistem, chiar în poziția lui închisă, va fi întotdeauna stabil.

c) Să presupunem că sistemul, în poziția lui deschisă, este reprezentat prin ecuația de gradul trei :

$$(a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3)x_e = Kx_i \qquad (3—30)$$

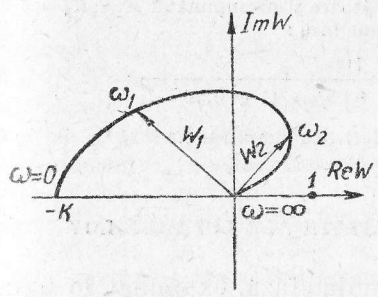
Din (3—30) se obține :

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{K}{a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3}.$$

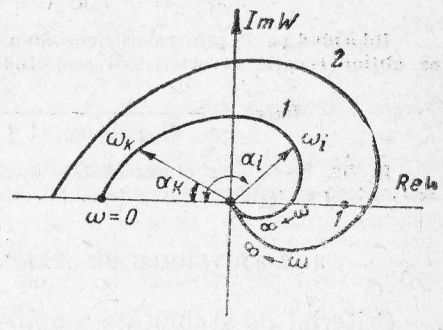
Pentru a putea construi caracteristica amplitudine-fază, se înlocuește p prin $j\omega$, obținându-se :

$$W(j\omega) = -\frac{K}{a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2(j\omega) + a_3}. \qquad (3—31)$$

In fig. 3—8, sunt reprezentate două caracteristici amplitudine-fază. Argumentul vectorului $W(j\omega)$ va avea valoarea maximă când $\omega \to \infty$, tinzând către



3—7 Caracteristica amplitudine-fază a sistemului reprezentat prin ecuațiile de gradul doi



3—8 Caracteristicile amplitudine-fază ale sistemelor reprezentate prin ecuațiile de gradul trei

$-K\frac{3}{2}\pi$. Stabilitatea sau nestabilitatea sistemului închis va depinde de locul de intersecție al caracteristicii amplitudine-fază cu axa reală pozitivă. Dacă această intersecție are loc între punctul $(1,j0)$ și originea axelor de coordonate (curba *1*), sistemul este stabil; dacă este la dreapta acestui punct (curba *2*), sistemul este nestabil.

Din (3—31) rezultă clar că, odată cu variația mărimii factorului de amplificare K, caracteristica amplitudine-fază se extinde proporțional cu amplificarea K.

Factorul de amplificare K_0 ajunge la o valoare critică în momentul când curba trece prin punctul $(1,j0)$. Pentru această valoare a lui K_0, sistemul se va găsi la limita de stabilitate. Spre deosebire de cazurile examinate la punctele *a* și *b*, pentru care valoarea critică a factorului de amplificare este infinită, în cazul de față valoarea critică K_0 este un număr oarecare finit, a cărui valoare depinde de valorile altor parametri ai sistemului.

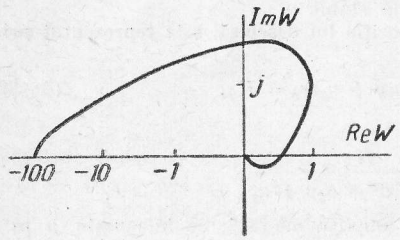


Fig. 3—9. Caracteristica amplitudine-fază a unui sistem deschis, corespunzător fig. 3—1.

d) Să utilizăm criteriul caracteristicii amplitudine-fază pentru examinarea stabilității sistemului reprezentat în fig. (3—1).

Intr'un sistem deschis, tensiunea etalon nu are un rol bine precizat; deaceea, la trasarea caracteristicii amplitudine-fază, această tensiune este neglijată. Deschizând sistemul în punctul *A* (fig. 3—2), se obține ecuația unui sistem deschis:

$$(1 + T_1p)\ (1 + T_2p)\ (1 + T_3p)x_e = K_1K_2K_3x_i$$

sau

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{K_1K_2K_3}{(1 + T_1p)\ (1 + T_2p)\ (1 + T_3p)}.$$

Inlocuind pe T_i prin valorile corespunzătoare și presupunând $K_1K_2K_3 = 100$, se obține ecuația caracteristicii amplitudine-fază:

$$W(j\omega) = -\frac{100}{(1 + 0{,}5j\omega)\ (1 + 0{,}05j\omega)\ (1 + 0{,}005j\omega)}.$$

In fig. 3—9, este reprezentată caracteristica amplitudine-fază [1]), din care se constată că sistemul dat este stabil.

3—5. CRITERIILE DE STABILITATE ALE LUI MIHAILOV

Criteriul de stabilitate amplitudine-fază, examinat în paragraful precedent, a fost propus de Nyquist pentru cercetarea stabilității amplificatorilor cu legătură inversă. Marele merit a lui A. V. Mihailov este că el a fost primul care a indicat posibilitatea utilizării criteriului menționat mai sus și care, l-a aplicat la studiul stabilității în reglarea automată. Paralel cu aceasta, A. V. Mihailov a elaborat și un criteriu propriu de stabilitate, care, în majoritatea cazurilor, este mult mai eficace decât celelalte criterii cunoscute până atunci.

[1]) Curba este construită la scară logaritmică.

In principiu, criteriul lui Mihailov constă în următoarele:

Un sistem este stabil dacă ecuația caracteristică corespunzătoare sistemului:

$$f(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (3—32)$$

satisface condițiile:

1) $f(j\omega) \neq 0$, adică $a_n \neq 0$ când $\omega = 0$.

2) Locul geometric al vârfurilor vectorului $f(j\omega)$, pentru variația lui ω dela 0 până la ∞, în cazul unei ecuații de gradul n, trebue să treacă succesiv (fără întrerupere) printr'un număr de n cadrane, începând dela stânga spre dreapta. Această condiție poate fi înlocuită prin următoarele trei condiții:

a) dacă în $f(j\omega)$ se separă părțile reale și imaginare:

$$f(j\omega) = g(\omega) + jh(\omega),$$

atunci ecuațiile

$$g(\omega) = 0$$

și

$$h(\omega) = 0$$

trebue să aibă rădăcini reale.

b) Valoarea $g(\omega)$ și viteza de variație $h(\omega)$ în punctul $\omega = 0$, adică $g(0)$ și $h_{(\omega)}(0)$, trebue să aibă același semn.

c) Trecerile prin zero ale funcțiilor $g(\omega)$ și $h(\omega)$ trebue să fie succesive, ceeace înseamnă că pentru creșterea continuă a lui ω dela zero înainte, trecerile prin zero ale funcțiilor $g(\omega)$ și $h(\omega)$ trebue să aibă loc alternativ.

Criteriul lui Mihailov se poate demonstra în același mod ca și criteriul amplitudine-fază.

Intr'adevăr, fie

$$z_1,\ z_2 \ldots z_n.$$

rădăcinile ecuației date.

Dacă $a_0 = 1$, ecuația (3—22) poate fi scrisă sub forma:

$$f(p) = (p - z_1)\ (p - z_2) \ldots (p - z_n)$$

Dacă se înlocuește p cu $j\omega$ se obține:

$$f(j\omega) = (j\omega - z_1)\ (j\omega - z_2) \ldots . (j\omega - z_n),$$

$f(j\omega)$ este un vector al cărui modul este egal cu produsul modulelor vectorilor componenți și al cărui argument este egal cu suma argumentelor acestor vectori.

Dacă $\omega = 0$, vectorul $f(j\omega)$ are valoarea reală $f(0)$, cu argumentul egal cu zero, întrucât într'o ecuație cu coeficienți reali rădăcinile pot fi sau reale sau complexe conjugate. Argumentul rădăcinii reale este egal cu zero, întrucât se află pe axa reală, iar suma argumentelor rădăcinilor complexe conjugate este nulă (fig. 3—10). Semiaxa reală negativă reprezintă originea de fază a argumentelor.

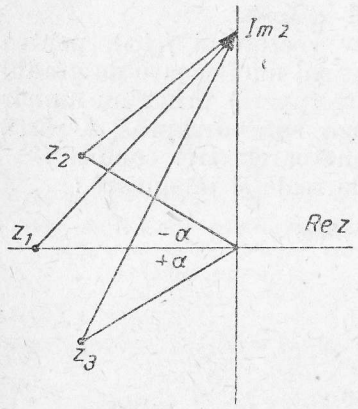


Fig. 3—10. Așezarea rădăcinilor în planul de variabilă complexă.

La o variație a lui ω dela zero la ∞, unghiul format de fiecare rădăcină reală variază cu $\frac{\pi}{2}$, iar cel format de o pereche de rădăcini complexe conjugate variază cu π. Prin urmare, în cazul unei ecuații de gradul n, dacă toate rădăcinile sunt situate de aceeași parte a axei imaginare, argumentul total al vectorului $f(j\omega)$ variază cu $\frac{\pi}{2} n$. De aici rezultă că, în cazul unui sistem stabil, vectorul $f(j\omega)$ trebue să parcurgă n cadrane, într'o anumită ordine de succesiune.

Dacă, în ecuația (3—32) a rădăcini sunt situate în partea stângă a axei imaginare, iar b rădăcini, în partea dreaptă a axei imaginare, unghiul rezultant de rotație a vectorului $f(j\omega)$, pentru variația lui ω dela 0 până la ∞, va fi :

$$\alpha_{rez} = \alpha_a - \alpha_b = \frac{\pi}{2} a - \frac{\pi}{2} b = \frac{\pi}{2}(a - b).$$

In aceste condiții, pentru a se putea constata dacă sistemul este sau nu stabil, trebue efectuate următoarele operații :

a) se determină ecuația caracteristică $f(p)$;

b) se înlocuește, în această ecuație, p prin $j\omega$;

c) se separă partea reală a lui $f(j\omega)$ de partea imaginară ;

d) se construiește $f(j\omega)$, variind pe ω dela zero la ∞.

Dacă numărul de cadrane parcurse succesiv de vectorul $f(j\omega)$ este egal cu gradul ecuației caracteristice, atunci sistemul examinat este stabil.

Ca exemplu de aplicare a sistemului lui Mihailov, să examinăm sistemul de reglare automată compus din cinci elemente de relaxare legate în serie.

In acest caz, ecuația caracteristică este :

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)(1 + T_5 p) + \\ + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 = 0 \qquad (3—33)$$

In fig. (3—11), este reprezentată curba $f(j\omega)$, din care se vede că ea începe în primul cadran, trece prin al doilea, al treilea, al patrulea și, ajungând din nou în primul cadran, se îndreaptă spre infinit, adică trece succesiv prin cinci cadrane. Intrucât ecuația este de gradul cinci, în conformitate cu cele precedente sistemul va fi stabil.

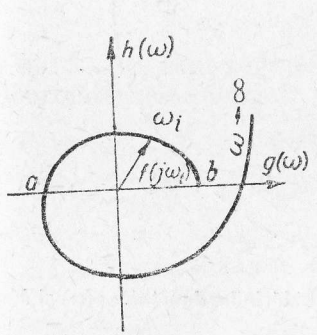


Fig. 3—11. Curba lui Mihailov pentru un sistem stabil.

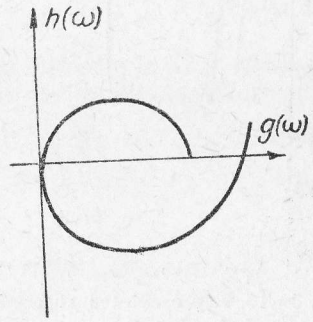


Fig. 3—12. Curba lui Mihailov pentru un sistem instabil.

Să menținem toate constantele de timp T_i invariabile și să mărim factorul de amplificare al sistemului. O mărire a lui K, în cazul când T_i sunt invariabile, atrage după sine deplasarea întregii curbe fără ca să i se modifice forma. La o valoare oarecare $K = K_0$, curba $f(j\omega)$ va trece prin originea

axelor de coordonate, adică sistemul se va găsi la limita stabilității (fig. 3—12). O nouă creștere a lui K face ca sistemul să devină nestabil.

De aici se poate trage concluzia practică și importantă că dacă se trasează curba $f(j\omega)$, se poate determina direct (cel puțin pentru un sistem cu un singur circuit), valoarea critică a factorului de amplificare. Intr'adevăr, întrucât prin creșterea valorii factorului de amplificare curba $f(j\omega)$ se de-

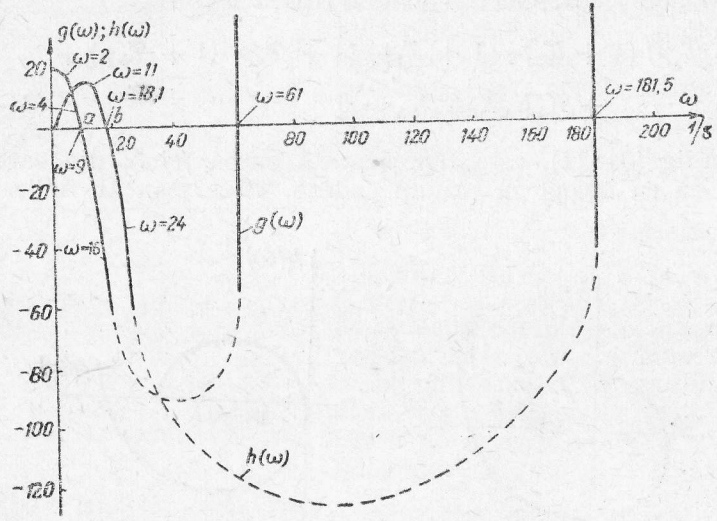


Fig. 3—13. Reprezentarea succesiunii rădăcinilor funcțiilor $g(\omega)$ și $h(\omega)$.

plasează spre dreapta cu o valoare egală cu variația lui K, iar limita de stabilitate are loc când curba trece prin originea axelor de coordonate, valoarea critică a factorului de amplifixare va fi distanța cea mai scurtă dintre punctele de pe curbă situate pe axa reală. In cazul fig. 3—11, aceasta va fi distanța dintre punctele ab.

Criteriul lui Mihailov dă posibilitatea să se examineze stabilitatea sistemului și cu ajutorul succesiunii zerourilor curbelor $g(\omega)$ și $h(\omega)$, ca funcții de ω. In cazul exemplului studiat, curbele $g(\omega)$ și $h(\omega)$ se trasează astfel:

Deschizând parantezele ecuației (3—33), se obține:

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0$$

în care:

$$a_0 = T_1 T_2 T_3 T_4 T_5,$$

$$a_1 = T_1T_2T_3T_4 + T_1T_2T_3T_5 + T_1T_3T_4T_5 + T_1T_2T_4T_5 + T_2T_3T_4T_5,$$

$$a_2 = T_1T_2T_3 + T_1T_2T_4 + T_1T_2T_5 + T_1T_3T_4 + T_1T_3T_5 + T_1T_4T_5 + T_2T_4T_5 + T_2T_3T_4 + T_2T_3T_5 + T_3T_4T_5,$$

$$a_3 = T_1T_2 + T_1T_3 + T_1T_4 + T_1T_5 + T_2T_3 + T_2T_4 + T_2T_5 + T_3T_4 + T_3T_5 + T_4T_5;$$

$$a_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5; \quad a_5 = 1 + K_1K_2K_3K_4K_5$$

Punând $j(\omega)$ în locul lui p și separând partea reală de partea imaginară, se obțin două ecuații:

$$g(\omega) = a_1\omega^4 - a_3\omega^2 + 1 + K_1K_2K_3K_4K_5$$

$$h(\omega) = a_0\omega^5 - a_2\omega^3 + a_4\omega.$$

In fig. 3—13, sunt reprezentate curbele $g(\omega)$ și $h(\omega) = f(\omega)$, pentru următoarele valori ale parametrilor elementelor separate:

$$T_1 = 2\text{ s}; \quad T_2 = 0{,}5\text{ s}; \quad T_3 = T_4 = T_5 = 0{,}01\text{ s};$$

$$K_1K_2K_3K_4K_5 = 10.$$

3—6. CRITERIUL DE STABILITATE GENERALIZAT (IMPĂRȚIREA ÎN „D", DUPĂ I. I. NEUMARK)

In cele expuse mai înainte, s'a arătat că influența oricărui parametru asupra stabilității sistemului reprezentat printr'o ecuație de grad superior poate fi determinată mult mai ușor cu ajutorul criteriului lui Mihailov, decât cu ajutorul criteriului Routh-Hurwitz. Pentru a se stabili influența unuia dintre parametrii sistemului asupra stabilității, este necesar însă să se traseze o familie de curbe, corespunzătoare diverselor valori ale acestui parametru.

I. I. Neumark a elaborat o metodă de examinare a stabilității care, pe de o parte, generalizează toate criteriile de mai sus, care pot fi considerate cazuri particulare ale acestei metode generale, iar pe de altă parte, dă posibilitatea ca prin

trasarea unei singure curbe să se determine imediat toate valorile parametrului pentru care sistemul rămâne stabil.

Prin împărțirea ecuației caracteristice cu coeficientul a_0 al variabilei p la gradul cel mai ridicat, această ecuație poate fi pusă oricând sub forma:

$$f(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n = 0. \qquad (3-34)$$

Poziția rădăcinilor ecuației (3—34) depinde de valorile numerice ale coeficienților a_i. Schimbând numai unul dintre coeficienții ecuației, se va schimba și poziția rădăcinilor acesteia, adică, de fapt, se va obține o altă ecuație.

Se alege un spațiu, astfel determinat încât orice punct al său este caracterizat printr'un polinom de gradul n. Acest spațiu se poate obține dacă se aleg ca axe de coordonate coeficienții ecuației (3—34).

Pentru a da o interpretare geometrică a celor spuse, vom examina ecuația de gradul trei:

$$p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0. \qquad (3-35)$$

In fig. 3—14, este reprezentat sistemul de coordonate pe ale cărui axe de coordonate s'au luat coeficienții a_1, a_2, a_3. Aceasta va constitui un spațiu tridimensional, având fiecare dintre punctele sale caracterizat printr'o serie de valori bine determinate ale coeficienților a_1, a_2 și a_3. Punctul M are coordonatele a_{11}, a_{21} și a_{31}; acestui punct îi corespunde polinomul:

$$f_1(p) = p^3 + a_{11} p^2 + a_{21} p + a_{31}.$$

Punctul N, de coordonate a_{12}, a_{22} și a_{32}, îi corespunde polinomul:

$$f_2(p) = p^3 + a_{12} p^2 + a_{22} p + a_{32}.$$

Spațiul din fig. 3—14, reprezentat prin trei dimensiuni, este denumit spațiul polinoamelor. Dacă spațiul are n dimensiuni, fiecare punct al unui astfel de spațiu este caracterizat printr'un polinom de gradul n.

După cum se știe, ecuația de gradul n are un număr de n rădăcini. Când valoarea lui p este egală cu valoarea uneia dintre rădăcini, polinomul devine egal cu zero. Din aceste motive, rădăcinile ecuației se numesc zerourile polinomului.

Fiecărui punct din spațiul n al polinoamelor îi va corespunde un număr de n puncte din spațiul rădăcinilor. Astfel, punctului M al spațiului cu trei dimensiuni al polinoamelor (fig. 3—14) îi corespund trei puncte situate în planul rădăcinilor (fig. 3—15). Acestea vor fi cele trei rădăcini ale ecuației (3—35), dacă în locul coeficienților acestei ecuații se introduc coordonatele punctului M.

Punctului N îi corespund deasemenea trei puncte situate n planul coordonatelor. Acestea însă vor fi alte puncte, deoarece punctul N are alte coordonate, prin urmare acestui punct îi corespunde un alt polinom. Prin fixarea unui punct în spațiul polinoamelor, se obțin de fiecare dată poziții diferite ale zerourilor în planul rădăcinilor. Aceasta este cecace ne interesează, întrucât, cunoscând poziția rădăcinilor se va putea răspunde la întrebarea dacă sistemul este stabil sau nestabil. In cazul punctelor M și N examinate, se va putea spune că primul punct corespunde unui sistem stabil, iar cel de al doilea punct, unui sistem nestabil, întrucât în primul caz toate zerourile sunt situate în partea stângă a axei imaginare, iar în al doilea caz, două dintre zerouri sunt în partea stângă, iar al treilea în partea dreaptă a axei imaginare. Evident, dacă se cunoaște poziția ocupată de zerourile polinomului, este

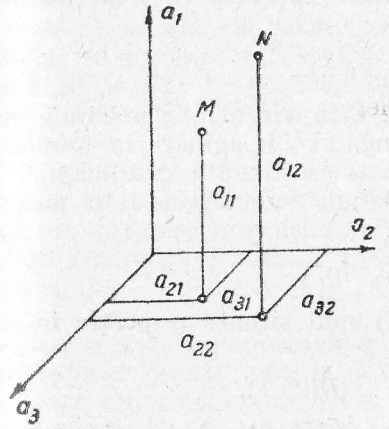


Fig. 3—14. Spațiul cu trei dimensiuni al polinoamelor.

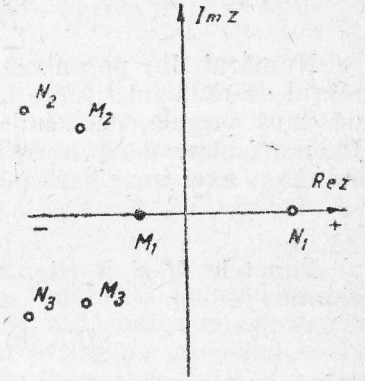


Fig. 3—15. Așezarea rădăcinilor în planul de variabilă complexă.

foarte ușor să se răspundă nu numai la întrebarea dacă sistemul este sau nu stabil, ci se poate răspunde și la întrebarea câte rădăcini, în cazul unor anumiți coeficienți, sunt situate în partea stângă a axei imaginare și câte rădăcini sunt situate la dreapta acestei axe.

Conform indicațiilor lui Neumark, se introduc următoarele notații convenționale: Dacă polinomul de gradul n are un număr de $(n - k)$ rădăcini situate în partea stângă a axei imaginare din planul rădăcinilor, atunci toată regiunea spațiului polinoamelor, cu polinoamele așezate în felul acesta, se va scrie:

$$D(n - k,\ k).$$

Numărul din paranteză, din fața virgulei, reprezintă numărul de rădăcini situate la stânga axei imaginare, iar numărul de după virgulă, rădăcinile situate la dreapta axei imaginare. In particular, dacă toate rădăcinile sunt situate în partea stângă a axei imaginare (sistem stabil), vom avea:

$$D(n,\ 0).$$

Punctele M și N (fig. 3—14) sunt situate respectiv în regiunile:

$$D(3,\ 0) \quad \text{și} \quad D(2,\ 1),$$

ceeace înseamnă că în primul caz sunt situate la stânga axei imaginare trei rădăcini, iar la dreapta acestei axe, un număr de zero rădăcini. In al doilea caz, în partea stângă există două rădăcini, iar în partea dreaptă, o singură rădăcină.

Ecuația caracteristică poate fi pusă sub forma:

$$Q(p) + \tau R(p) = 0, \qquad (3—36)$$

în care $Q(p)$ și $R(p)$ sunt polinoame cu coeficienți constanți și

τ — un paramtru oarecare, a cărui influență asupra stabilității sistemului trebue determinată.

Pentru simplificare, se presupune că τ este un număr complex, a cărui parte reală va fi tocmai valoarea parametrului care interesează.

In cazuri concrete, se poate considera ca parametru τ constanta de timp a unui element oarecare, factorul de amplificare al unui element separat sau al unui complex de elemente etc. Condiția unică, impusă în acest caz, este ca acest parametru, care face parte din ecuația caracteristică, să fie liniar.

Fiecărei valori a parametrului τ îi va corespunde un anumit punct în spațiul polinoamelor. Considerând că toți coeficienții ecuației rămân constanți, variabilă fiind numai valoarea lui τ, și ținând seama de faptul că τ este un număr complex, se obține totalitatea polinoamelor, corespunzând diferitelor valori ale lui τ, situate în planul τ de intersecție a spațiului acestor polinoame.

Se presupune că, pentru o anumită valoare a lui τ, k rădăcini se situează la dreapta și $(n - k)$ rădăcini se situează la stânga axei imaginare, adică:

$$D(n - k,\ k).$$

Se dă lui τ o creștere oarecare. In baza teoremei de dependență între rădăcinile și coeficienții unei ecuații, se poate afirma că pentru această mică variație a lui τ rădăcinile nu și-au schimbat poziția, ele păstrând așezarea lor anterioară:

$$D(n - k,\ k). \qquad (3—37)$$

La o variație continuă a lui τ, rădăcinile ecuației își vor schimba respectiv poziția în planul rădăcinilor și, pentru o valoare anumită a lui τ, cel puțin o singură rădăcină se va găsi pe axa imaginară. Orice variație ulterioară a lui τ în același sens poate face ca rădăcina situată pe axa imaginară, să treacă de cealaltă parte a acestei axe. De exemplu, dacă la o variație a lui τ, una dintre rădăcinile situate în partea stângă a semiplanului se plasează pe axa imaginară, pentru o altă variație a lui τ în același sens, în locul ecuației (3—37) se va obține:

$$D(n - k - 1,\ k + 1),$$

adică una dintre rădăcinile situate în semiplanul din stânga s'a mutat în semiplanul din dreapta. Valoarea τ, pentru care cel puțin o rădăcină se situează pe axa imaginară, este o valoare limită a acestui parametru. Notând cu $j\omega$ rădăcina situată pe axa imaginară, se poate determina valoarea limită τ, în modul următor: Intrucât $(j\omega)$ este rădăcina ecuației (3—36), dacă se înlocuește p cu $j\omega$, se obține:

$$Q(j\omega) + \bar{\tau} R(j\omega) = 0,$$

de unde :

$$\bar{\tau} = -\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (3-38)$$

Dând diferite valori lui ω, adică făcându-l să varieze dela $-\infty$ până la $+\infty$, din ecuația (3—38) se pot determina toate valorile limită ale lui τ.

Locul geometric al punctelor din plnaul τ, dat de ecuația (3—38), pentru variația lui ω dela $-\infty$ până la $+\infty$, împarte planul τ în două regiuni, în interiorul cărora toate polinoamele vor avea același număr de zerouri la stânga axei imaginare. Această curbă se numește limita împărțirii în D (împărțire în raport cu parametrul τ). Dacă sistemul de reglare automată poate fi făcut stabil pentru anumite valori ale lui τ, aceste valori pot fi determinate cu ajutorul împărțirii în D.

Exemplu : Fie sistemul de reglare compus din trei grupe de relaxare (fig. 3—2), având constantele de timp T_1, T_2, T_3 și factorii de amplificare K_1, K_2 K_3. Se cere să se stabilească pentru care valori ale factorului total de amplificare $K = K_1 K_2 K_3$ sistemul rămâne stabil.

In acest caz, ecuația caracteristică este :

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K_1 K_2 K_3 = 0. \quad (3-39)$$

Din condiția pusă în această problemă, în cazul de față parametrul τ este factorul total de amplificare $K = K_1 K_2 K_3$:

$$Q(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p);$$

$$R(p) = 1.$$

Rezolvând ecuația (3—39) în raport cu K și înlocuindu-l pe p prin $j\omega$, se obține ecuația limitei de împărțire în D în raport cu parametrul K :

$$\bar{K} = -(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)(1 + T_3 j\omega).$$

In fig. 3—16, este reprezentată curba limitei de împărțire în D. Intreg planul K este împărțit în trei regiuni I, II și III. După cum s'a arătat mai sus, pentru toate valorile lui K situate în interiorul regiunii date, toate polinoamele vor avea un număr egal de zerouri situate în stânga axei imaginare. In celelalte regiuni, pentru K situat în regiunile I și II, numărul rădăcinilor situate la stânga axei imaginare va fi diferit.

După ce a fost determinată limita împărțirii în D, este necesar să fie rezolvate următoarele probleme :

1) *în care regiune numărul de zerouri situate la stânga axei imaginare este maxim?*

2) *regiunea care are un număr maxim de zerouri situate în partea stângă a axei imaginare este o regiune stabilă?*

Este evident că această regiune va fi stabilă numai în cazul când numărul de zerouri situate în partea stângă a axei imaginare va fi egal cu gradul ecuației caracteristice. Pentru a răspunde la prima întrebare, trebue să folosim regula hașurării, indicată de Neumark, care constă în următoarele. Mergând dealungul curbei limitei de împărțire în D, dela valoarea $\omega = -\infty$ la zero și dela zero la $+\infty$, se hașurează partea stângă a curbei. Prin trecerea de pe partea hașurată a curbei pe partea nehașurată, dispare rădăcina situată în partea stângă a axei imaginare și invers, prin trecerea de pe partea nehașurată a curbei pe partea hașurată, dispare rădăcina situată în partea dreaptă a axei imaginare. Plecând dela această regulă, putem conchide că la polinoamele din regiunea I (fig. 3—16), numărul rădăcinilor situate în jumătatea stângă a planului va fi mai mare decât la polinoamele situate în regiunea II, acestea din urmă, la rândul lor, având un număr mai mare de rădăcini situate în partea stângă a axei imaginare decât polinoamele din regiunea III. Efectuând hașurarea după principiul arătat mai sus, se poate determina direct regiunea ale cărei polinoame vor avea cel mai mare număr de rădăcini situate la stânga axei imaginare. In cazul exemplului examinat, aceasta va fi regiunea I. (Trebue avut în vedere faptul că, pentru variația lui ω dela $-\infty$ la $+\infty$, punctul va putea parcurge de mai multe ori curba de împărțire în D. In asemenea cazuri, curba de împărțire în D va trebui hașurată de atâtea ori, de câte ori punctul va parcurge curba respectivă. Dacă, de exemplu, punctul va parcurge curba de trei ori, va trebui să se hașureze curba de trei ori, iar în timpul trecerii printr'o astfel de curbă, în dreptul regiunilor hașurate dispare nu numai o singură rădăcină, ci trei rădăcini, situate în partea stângă a axei imaginare).

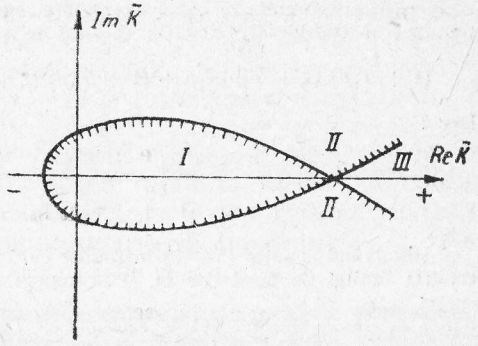


Fig. 3—16. Curba limitei de împărțire în D, în raport cu factorul de amplificare

Pentru a putea stabili dacă regiunea I este o regiune stabilă, trebue să se răspundă la cea de a doua întrebare. Răspunsul se obține în felul următor. Deoarece există același număr de rădăcini în partea stângă a axei imaginare pentru toate valorile lui K situate în interiorul regiunii I, este suficient să ne convingem dacă sistemul este stabil pentru o anumită valoare a lui K, pentru care stabilirea acestui lucru nu prezintă nicio dificultate. In acest caz, se va rezolva această problemă și pentru toate celelalte valori ale lui K, din interiorul acestei regiuni.

Să exemplificăm acest lucru, folosind ecuația (3—39).

Este ușor de văzut că în cazul când $K = K_1 K_2 K_3 = 0$, sistemul va fi stabil, deoarece rădăcinile ecuației (3—39), pentru $K = 0$, se determină direct și sunt respectiv egale cu :

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}\ ;\ p_2 = -\frac{1}{T_2}\ ;\ p_3 = -\frac{1}{T_3}.$$

Insă $K = 0$ face parte dintre valorile lui K situate în regiunea I, deci şi în cazul celorlalte valori a lui K, situate în interiorul regiunii I, sistemul va fi stabil. In acest mod, se răspunde la a doua întrebare. Această metodă dă astfel posibilitatea de a se stabili dacă prin variaţia parametrului dat sistemul poate deveni stabil; în cazul când acest lucru este posibil, se determină întreaga regiune a parametrului pentru care sistemul este stabil.

Fie de determinat modul în care orice constantă de timp influenţează asupra stabilităţii sistemului. In cazul exemplului examinat, fie constanta de timp T_1 parametrul considerat. Ecuaţia (3—39) se poate scrie:

$$(1 + T_2p)\,(1 + T_3p)T_1p + (1 + T_2p)\,(1 + T_3p) + K_1K_2K_3 = 0 \qquad (3-40)$$

Deci:

$$Q(p) = (1 + T_2p)\,(1 + T_3p) + K_1K_2K_3, \qquad R(p) = (1 + T_2p)\,(1 + T_3p)p,$$

$$\tau = T_1.$$

Rezolvând ecuaţia (3—40) în raport cu T_1 şi înlocuind p prin $j\omega$, se obţine ecuaţia limitei de împărţire în D în raport cu parametrul T_1:

$$\overline{T}_1 = -\frac{(1 + T_2j\omega)\,(1 + T_3j\omega) + K_1K_2K_3.}{(1 + T_2j\omega)\,(1 + T_3j\omega)j\omega}.$$

In fig. 3—17, este indicată limita împărţirii în D în raport cu parametrul T_1. La fel ca şi la trasarea împărţirii în D în raport cu factorul de amplificare, în cazul de faţă ne interesează numai valorile reale ale constantei de timp, adică împărţirea axei reale a planului T_1.

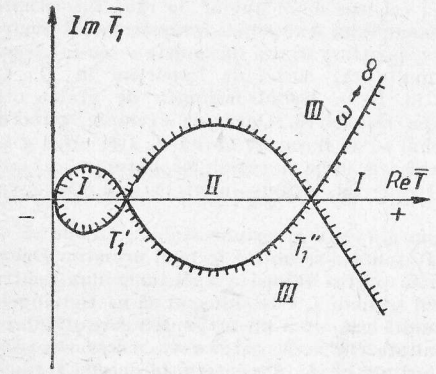


Fig. 3—17. Curba limitei de împărţire în D, în raport cu constanta de timp.

Din fig. 3—17 rezultă că regiunea care ar avea cele mai multe şanse de a fi stabilă este regiunea I. Aceasta se stabileşte fără nicio dificultate. Intr'adevăr, dacă valorile lui T_1 sunt destul de mici, sistemul va fi stabil, deoarece ecuaţia caracteristică, în cazul când $T_1 \to 0$, se transformă în ecuaţie de gradul doi având coeficienţii constanţi pozitivi, care întotdeauna satisfac condiţiile de stabilitate. In acest caz, rădăcina a treia va tinde către $-\infty$, deci nu va perturba stabilitatea. Având ca punct de plecare teorema de dependenţă continuă a rădăcinilor de coeficienţii ecuaţiei, se poate afirma că sistemul va rămâne stabil într'o regiune oarecare unde valorile lui T_1 sunt mici. Această regiune iese în evidenţă la efectuarea împărţirii în D şi se notează cu I. Insă, pe baza regulei de haşurare indicată mai sus, se stabileşte că regiunea stabilă conţine nu numai valorile mici

ale lui T_1, ci şi valorile mari ale acesteia. Din fig. 3—1, rezultă că, odată cu variaţia lui T_1 dela 0 până la infinit, regiunile de stabilitate şi nestabilitate alternează şi anume în cazul când:

$$0 < T_1 < T_1',$$

sistemul va fi stabil. Dacă:

$$T_1' < T_1 < T_1'',$$

sistemul va fi nestabil şi în cazul când:

$$T_{1,2}'' < T_1 < \infty,$$

sistemul va fi din nou stabil. Din exemplul cercetat se vede modul în care pot fi determinate valorile parametrului pentru care sistemul este stabil.

3—7. CRITERIUL DE STABILITATE APERIODIC

Criteriile de stabilitate examinate în paragrafele precedente dau posibilitatea să se stabilească condiţiile care trebue îndeplinite pentru ca rădăcinile ecuaţiei caracteristice să fie situate în partea stângă a axei imaginare din planul rădăcinilor. Dacă aceste condiţii de stabilitate sunt satisfăcute, putem fi siguri că, după trecerea unui interval de timp oarecare, sistemul va ajunge aproape de starea de echilibru. Natura fenomenului tranzitoriu nu poate fi însă lămurită numai cu ajutorul criteriilor de stabilitate.

Fără a se aborda în detaliu problema stabilirii naturii fenomenului tranzitoriu (această problemă va fi examinată în capitolele care urmează), menţionăm că, în anumite cazuri, poate fi destul de util ca toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice să fie reale şi negative.

S'a stabilit că atunci când procesul de reglare este provocat de un impuls de forma unui salt unitar, pentru ca procesul de reglare să fie aperiodic, cu condiţiile iniţiale egale cu zero, este suficient ca toate rădăcinile să fie reale şi negative. Faptul că ecuaţia caracteristică are numai rădăcini reale şi negative, oricare ar fi condiţiile iniţiale, face să se afirme că numărul oscilaţiilor valorii reglabile nu depăşeşte gradul ecuaţiei caracteristice. Problema stabilirii condiţiilor necesare ca toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice să fie reale şi negative a fost examinată de foarte multe ori în lucrările de specialitate. Fără a efectua demonstraţii matematice, vom expune cri-

teriul de stabilitate aperiodică propus de autor, aplicabil ecuațiilor de orice grad. Acest criteriu se formulează astfel :

Pentru ca toate rădăcinile ecuației :

$$f(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

să fie reale și negative, este necesar și suficient ca toți determinanții în diagonală din tabloul format cu coeficienții ecuației, indicat mai jos, să fie mai mari decât zero :

$$\begin{Vmatrix} na_0 & a_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ (n-1)\,a_1 & a_1 & na_0 & a_0 & \cdot & \cdot \\ (n-2)\,a_2 & a_2 & (n-1)a_1 & a_1 & \cdot & \cdot \\ (n-3)\,a_3 & a_3 & (n-2)a_2 & a_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_n & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} \qquad (3-41)$$

Pentru exemplificare, să examinăm cazul ecuației de gradul trei :

$$f(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Tabloul (3—41), corespunzător ecuației de gradul trei, este :

$$\begin{Vmatrix} 3a_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_1 & a_1 & 3a_0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_2 & 2a_1 & a_1 & 3a_0 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_2 & 2a_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{Vmatrix} ;$$

Conform criteriului enunțat, se obțin următoarele condiții :

1) $a_0 > 0$;

2) $\begin{vmatrix} 3a_0 & a_0 \\ 2a_1 & a_1 \end{vmatrix} > 0$

sau

$$3a_0 a_1 - 2a_0 a_1 = a_0 a_1 > 0,$$

ceeace este echivalent cu :

$$a_1 > 0 ;$$

3) $\begin{vmatrix} 3a_0 & a_0 & 0 \\ 2a_1 & a_1 & 3a_0 \\ a_2 & a_2 & 2a_1 \end{vmatrix} > 0$

sau, după simplificări :

$$2a_1^2 - 6a_0 a_2 > 0 ;$$

4) $\begin{vmatrix} 3a_0 & a_0 & 0 & 0 \\ 2a_1 & a_1 & 3a_0 & a_0 \\ a_2 & a_2 & 2a_1 & a_1 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} > 0$

sau, după simplificări :

$$a_1^2 a_2 + 3a_0 a_1 a_3 - 6a_0 a_2^2 > 0 ;$$

5) $\begin{vmatrix} 3a_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_1 & a_1 & 3a_0 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_2 & 2a_1 & a_1 & 3a_0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_2 & 2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \end{vmatrix}$

sau

$$a_0 a_1^2 a_2^2 - 4a_0 (a_0 a_2^3 + a_3 a_1^3) + 18 a_0 a_3 a_1 a_2 - 27 a_0^2 a_3^2 > 0 ;$$

6) $$a_3 > 0. \qquad (3-42)$$

3—8. CURBELE LUI VÂȘNEGRADSCHI

De problema stabilității aperiodice s'a ocupat fondatorul teoriei clasice a reglării automate, I. A. Vâșnegradschi. Examinând ecuația caracteristică de gradul trei sub forma : $z^3 + Xz^2 + Yz + 1 = 0$ [1]), I. A. Vâșnegradschi a trasat, în sistemul de coordonate al parametrilor X și Y, curbele care împart planul XY în două regiuni, stabile, și nestabile. La rândul ei, din regiunea stabilă se separă regiunea stabilității aperiodice, adică regiunea corespunzătoare valorii parametrilor X și Y pentru care toate cele trei rădăcini sunt reale și negative.

[1]) După cum se arată mai jos, orice ecuație liniară de gradul trei poate fi redusă la această formă.

Parametrii X şi Y sunt funcţii de coeficienţii ecuaţiei şi se numesc parametrii lui Vâşnegradschi, iar curbele poartă denumirea de curbele lui Vâşnegradschi.

Să determinăm ecuaţia curbelor lui Vâşnegradschi cu ajutorul criteriilor de stabilitate şi de stabilitate aperiodică bine cunoscute. In acest scop, se aduce ecuaţia de gradul trei la forma în care ea depinde de parametrii X şi Y şi, odată cu aceasta, se constată modul în care X şi Y variază în funcţie de coeficienţii ecuaţiei.

Fie ecuaţia de gradul trei :

$$f(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0 ; \qquad (3-42)$$

împărţind ecuaţia prin a_3, introducând notaţiile :

$$b_0 = \frac{a_0}{a_3} ; \quad b_1 = \frac{a_1}{a_3} ; \quad b_1 = \frac{a_2}{a_3} \qquad (3-44)$$

şi ţinând seama de (3—44), se obţine :

$$f(p) = b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + 1 = 0. \qquad (3-45)$$

Făcând substituţia :

$$p = \frac{z}{\sqrt[3]{b_0}}, \qquad (3-46)$$

se obţine :

$$f(z) = z^3 + \frac{b_1}{\sqrt[3]{b_0^2}} z^2 + \frac{b_2}{\sqrt[3]{b_0}} z + 1 = 0.$$

Notând :

$$\frac{b_1}{\sqrt[3]{b_0^2}} = X \text{ şi } \frac{b_2}{\sqrt[3]{b_0}} = Y, \qquad (3-47)$$

se obţine ecuaţia (3—48) de forma ecuaţiei lui Vâşnegradschi :

$$z^3 + Xz^2 + Yz + 1 = 0. \qquad (3-48)$$

Presupunând că $X > 0$ şi $Y > 0$, se determină, cu ajutorul criteriului lui Routh-Hurwitz, condiţia de stabilitate pentru ecuaţia (3—48).

Intocmind determinantul lui Hurwitz, se obţine :

$$\begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ 1 & Y & 0 \\ 0 & X & 1 \end{vmatrix} > 0$$

sau

$$XY - 1 > 0. \qquad (3-49)$$

Ecuaţia limitei se obţine dacă în locul semnului inegal se introduce în (3—49) semnul egal :

$$XY = 1 \qquad (3-50)$$

Aceasta reprezintă ecuaţia unei hiperbole, care a căpătat denumirea de hiperbola lui Vâşnegradschi. Hiperbola lui Vâşnegradschi împarte planul XY în două regiuni, una de stabilitate şi alta de nestabilitate.

Să determinăm ecuaţia curbei care separă în plan regiunea cu rădăcini reale şi negative. In acest scop, se folosesc rezultatele obţinute în paragraful precedent, în care s'au arătat condiţiile pe care trebue să le îndeplinească rădăcinile reale şi negative.

După cum s'a arătat mai sus, limita stabilităţii, în cazul de faţă, poate fi obţinută dacă se egalează cu zero al $(n-1)$-lea determinant al lui Hurwitz. Analog cu aceasta, se poate obţine limita aperiodicităţii dacă se egalează cu zero membrul întâi al inegalităţii (3—42).

Se obţine :

$$a_0 a_1^2 a_2^2 - 4a_0 (a_0 a_2^3 + a_3 a_1^3) + 18 a_0 a_3 a_1 a_2 - 27 a_0^3 a_3^3 = 0.$$

In cazul examinat :

$$a_0 = 1, \; a_3 = 1, \; a_1 = X, \; a_2 = Y.$$

Inlocuind aceste valori ale coeficienţilor, se obţine ecuaţia limitei stabilităţii aperiodice :

$$X^2Y^2 - 4(X^3 + Y^3) + 18XY - 27 = 0.$$

In fig. 3—18, sunt reprezentate curbele lui Vâşnegradschi şi notate respectiv regiunile de nestabilitate, stabilitate şi stabilitate aperiodică.

Hiperbola lui Vâșnegradschi împarte planul celor doi parametri reali X, Y în două regiuni și anume: o regiune de stabilitate și alta de nestabilitate. Acest rezultat a fost obținut de I. A. Vâșnegradschi, pentru ecuația de gradul trei, și generalizat de I. I. Neumark pentru o ecuație de orice grad, ai cărei coeficienți depind de doi parametri reali. Curbele obținute de Neumark reprezintă limita împărțirii D în raport cu doi parametri reali. Deaceea, ele pot fi denumite curbele lui Vâșnegradschi generalizate.

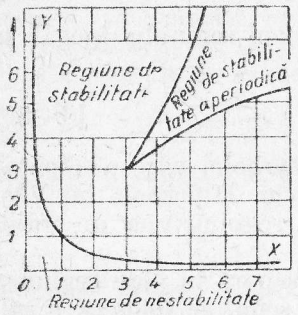


Fig. 3—18. Curbele lui Vâșnegradschi.

Presupunem că ecuația caracteristică poate fi reprezentată prin:

$$\tau Q(p) + \gamma P(p) + R(p) = 0, \tag{3—51}$$

în care $Q(p)$, $P(p)$, $R(p)$ sunt polinoame ale căror coeficienți nu depind de τ și γ;

iar τ și γ — parametrii a căror influență asupra stabilității interesează.

Presupunând că $j\omega$ este o rădăcină a ecuației (3—51), se obține:

$$\tau Q(j\omega) + \gamma P(j\omega) + R(j\omega) = 0. \tag{3—52}$$

Notând:

$$Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega),$$
$$P(j\omega) = P_1(\omega) + jP_2(\omega),$$
$$R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega),$$

ecuația (3—52) poate fi scrisă:

$$\tau Q_1(\omega) + \gamma P_1(\omega) + R_1(\omega) + j[\tau Q_2(\omega) + \gamma P_2(\omega) + R_2(\omega)) = 0, \tag{3—53}$$

din care se obțin două ecuații, necesare pentru determinarea lui τ și γ, care satisfac relația (3—52), și anume:

$$\tau Q_1(\omega) + \gamma P_1(\omega) + R_1(\omega) = 0,$$
$$\tau Q_2(\omega) + \gamma P_2(\omega) + R_2(\omega) = 0. \tag{3—54}$$

Rezolvând sistemul (3—54) în raport cu τ și γ, se obține:

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} -R_1(\omega) & P_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & P_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}}, \tag{3—55}$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & P_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}}. \tag{3—56}$$

Ecuațiile (3—55) și (3—56) sunt valabile numai pentru acele valori ale lui ω pentru care ecuațiile (3—54) rămân amândouă liniare și independente. In general, ecuațiile (3—54) încetează de a fi liniare și independente pentru $\omega = 0$ și $\omega = \infty$. Deaceea, limita împărțirii în D în raport cu parametrii reali, limită trasată cu ajutorul ecuațiilor (3—55) și (3—56) în cazul când ω variază dela $-\infty$ la $+\infty$, se complectează cu ajutorul unor linii particulare, ale căror ecuații se obțin făcând $\omega = 0$ și $\omega = \infty$ în ecuația (3—52).

Regula hașurării este următoarea:

Pentru toate valorile lui ω în care:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Q_1(\omega) & P_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix} > 0,$$

se hașurează partea stângă a limitei, iar pentru $\Delta < 0$, respectiv partea dreaptă a limitei. Este ușor de văzut că dacă $\tau = f_1(\omega^2)$ și $\gamma = f_2(\omega^2)$, adică sunt funcții pare, iar Δ este o funcție impară a lui ω, în cazul când ω variază dela $-\infty$ la $+\infty$, limita se va hașura de două ori pe aceeași parte. Deaceea, la depășirea limitei, în dreapta zonei hașurate se pierd două rădăcini, situate în partea stângă a axei imaginare.

Anumite linii se hașurează în așa fel, încât partea hașurată să fie situată în fața părții hașurate a limitei împărțirii în D.

CAPITOLUL IV

DISPOZITIVELE DE STABILIZARE

Cu ocazia expunerii diferitelor criterii de stabilitate, nu s'a tratat nimic despre metodele de stabilizare a sistemelor nestabile.

S'a arătat mai înainte că un sistem de reglare automată, compus dintr'o serie de elemente principale, este reprezentat printr'un şir de elemente cu un singur circuit. In funcţie de numărul şi de caracterul elementelor care formează şirul cu un singur circuit şi în funcţie de valorile parametrilor lor, sistemul poate fi : a) structural-nestabil, adică nestabil pentru oricare valoare a parametrilor ; b) nestabil, adică nestabil pentru anumite valori ale parametrilor, şi c) stabil. Deaceea, înainte de a examina metodele de stabilizare şi exemplele de elemente de stabilizare, să determinăm, din punct de vedere al stabilităţii, particularităţile sistemelor cu un singur circuit.

4—1. REGLAREA TENSIUNII UNUI GENERATOR ELECTRIC DE CURENT CONTINUU, CU AJUTORUL REGULATORULUI DE TENSIUNE ELECTRONO-TIRATRONIC

Fie de examinat sistemul de reglare a tensiunii unui generator de curent continuu compus numai dintr'o serie de elemente principale şi de stabilit, cu ajutorul acestui exemplu, particularităţile sistemelor cu un singur circuit, generalizând apoi concluziile trase asupra oricărui sistem cu un singur circuit.

Obiectul de reglare îl formează un generator de curent continuu, a cărui tensiune trebue menţinută constantă, cu un grad de precizie bine determinat. Pentru simplificare, se consideră că sarcina generatorului este pur activă. Se ţine seama deasemenea de faptul că viteza de rotaţie a generatorului rămâne constantă, iar reglarea tensiunii se realizează acţionându-se asupra curentului de excitaţie.

Elementul de măsurare este o punte, formată dintr'o rezistenţă neliniară R_4 şi din trei rezistenţe constante R_1, R_2 şi R_3 (fig. 4—1).

In punctele *ab* se aplică o tensiune variabilă, care reprezintă, pentru elementul de măsurare, mărimea de intrare.

Notăm această tensiune cu u_i. De pe diagonala *cd* a punţii se ia tensiunea care reprezintă mărimea tensiunii de ieşire u_e, a punţii de măsurare. In cazul variaţiei tensiunii de intrare, se modifică valoarea curentului care trece prin braţele punţii. Rezistenţele R_1, R_2 şi R_3 nu depind de valoarea curentului,

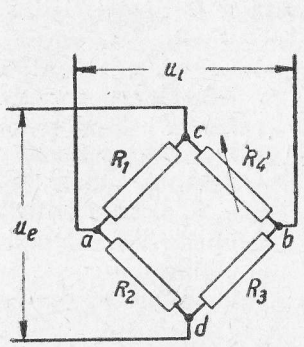


Fig. 4—1. Elementul de măsurare în punte.

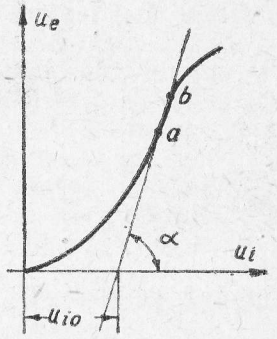


Fig. 4—2. Caracteristica neliniară a punţii.

în timp ce valoarea rezistenţei R_4 variază în raport cu variaţia curentului care o străbate.

In fig. 4—2, este reprezentată una dintre caracteristicele posibile ale punţii cu rezistenţă neliniară. Din această caracteristică rezultă că în porţiunea *ab*, o variaţie mică a tensiunii de intrare produce o variaţie mare a tensiunii de ieşire.

Variaţia rezistenţei R_4 se datoreşte variaţiei temperaturii acesteia, temperatură care se schimbă odată cu variaţia curentului care încălzeşte această rezistenţă.

Pentru a avea o evidenţă a proceselor termice care au loc în rezistenţa R_4, elementul de măsurare poate fi reprezentat printr'un element de relaxare :

$$(1 + T_1 p)u_e = Ku_i,$$

în care T_1 este constanta de timp, condiţionată de capacitatea calorică şi de cedarea de căldură a rezistenţei neliniare. $K = \operatorname{tg}\alpha$, dacă $t = \infty$ $(p = 0)$, reprezintă deci factorul de amplificare pe porţiunea liniară a caracteristicii.

Tensiunea u_e se aplică circuitului grilă-catod al lămpii electronice cu trei elctrozi a punții regulatoare de fază (fig. 4—3). In această schemă, lampa electronică îndeplinește funcțiunea unei rezistențe ohmice reglabile. La o creștere a potențialului negativ al grilei lămpii, rezistența ei echivalentă crește, iar la o micșorare a acestui potențial, rezistența scade.

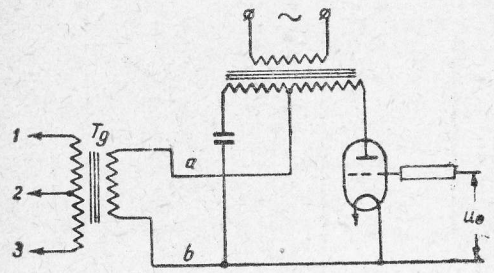


Fig. 4—3. Puntea cu fază variabilă.

In felul acesta, schema reprezentată în fig. 4—3 este echivalentă cu schema reprezentată în fig. 4—4, în care lampa a fost înlocuită cu o rezistență variabilă.

In fig. 4—5, este reprezentată diagrama vectorială a acestui circuit, numit cu faza-variabilă. In această diagramă, *dc* este tensiunea rețelei, iar razele semicercului, trasate pe vectorul *dc* ca diametru, reprezintă tensiunea dintre punctele *a* și *b* ale schemei. La o variație a rezistenței *R*, extremitatea vectorului *ab* se deplasează pe semicerc. Deaceea, tensiunea dintre punctele *a* și *b* va fi constantă și egală cu jumătate din amplitudinea tensiunii totale din înfășurarea secundară a transformatorului. Argumentul tensiunii la bornele *a* și *b* va depinde de valoarea rezistenței *R*. In cazul unei variații a rezistenței *R* dela zero până la infinit, argumentul tensiunii U_{ab} variază dela 0 la 180°. (fig. 4-5.

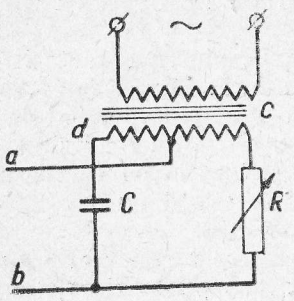


Fig. 4—4. Puntea cu fază variabilă.

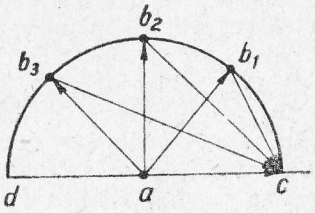


Fig. 4—5. Diagrama vectorială a punții cu fază variabilă.

Astfel, în cazul variației tensiunii de reglare, variază potențialul la grila lămpii, respectiv rezistența echivalentă, fapt care duce la variația tensiunii U_{ab}.

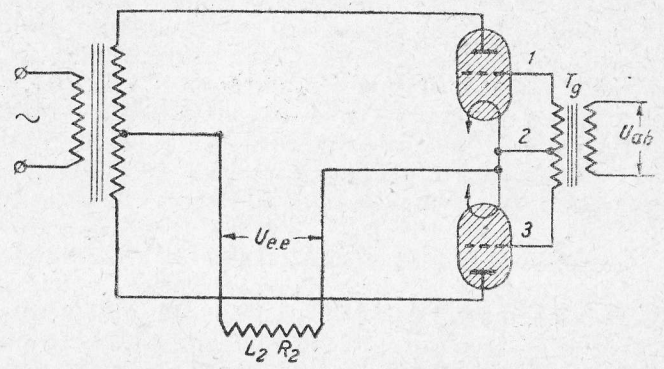


Fig. 4—6. Redresor tiratronic de comandă.

După cum rezultă din fig. 4—6, U_{ab} alimentează transformatorul de grilă T_g. Infășurarea secundară a transformatorului de grilă T_g are trei borne (*1*, *2* și *3*). Două borne extreme sunt conectate la grilele a doi tiratroni, care funcționează ca redresori ai ambelor semiperioade, iar borna de mijloc se conectează la catodul tiratronilor.

După cum se știe, aprinderea tiratronului are loc în cazul când tensiunea de grilă devine mai mare decât tensiunea critică de aprindere. In fig. 4—7, este reprezentată curba de variație a tensiunii critice de aprindere a tiratronului $U_{g.cr}$, în cazul variației sinusoidale a tensiunii anodice U_a. Mărimea valorii medii a curentului redresat va depinde de unghiul de aprindere. De exemplu, dacă unda tensiunii de grilă intersectează

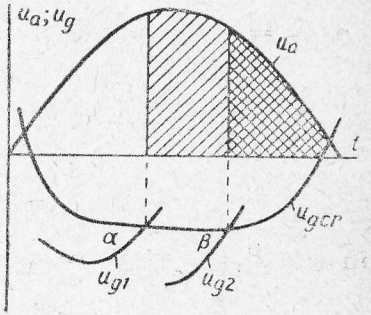


Fig. 4—7. Momentul comenzii de aprindere a tiratronilor.

curba de aprindere $U_{g.cr}$ de jos în sus, în punctul α, valoarea medie a tensiunii redresate se determină din partea haşurată oblic a semiundei tensiunii anodice. Dacă tensiunea de grilă intersectează curba de aprindere în punctul β, valoarea medie a tensiunii redresate se determină prin porţiunea de semiundă haşurată dublu pe fig. 4—7. Schimbând faza tensiunii de grilă, se poate schimba durata de ardere a tiratronilor, în limitele fiecărei semiunde a tensiunii anodice, prin urmare se poate schimba mărimea valorii medii a curentului redresat.

După cum se vede din fig. 4—6, înfăşurarea de excitaţie a excitatricei este alimentată de curentul redresat al tiratronilor, deci odată cu variaţia unghiului de aprindere, variază şi valoarea tensiunii aplicate înfăşurării de excitaţie a excitatricei.

Considerând atât puntea cu faze în rotaţie cât şi redresorul tiratronic fără inerţie, se obţine, pentru variaţii mici ale tensiunii de reglare, o relaţie algebrică între variaţia acestei tensiuni şi variaţia tensiunii aplicată înfăşurării de excitaţie a excitatricei. Notând această tensiune cu $u_{e.e}$, ecuaţia de funcţionare a excitatricei va fi :

$$(1 + T_2 p)_{e.g} U = K_2 u_{e.e},$$

în care $u_{e.g}$ este tensiunea de excitaţie a generatorului ;

$T_2 = \frac{L_2}{R_2}$ — constanta de timp a circuitului de excitaţie a excitatricei ;

K_3 — factorul de amplificare a tensiunii excitraticei. Ecuaţia de funcţionare a generatorului se va scrie :

$$(1 + T_3 p) u_g = K_3 u_{e.g},$$

în care $T_3 = \frac{L_3}{R_3}$ este constanta de timp din circuitul de excitaţie a geeneratorului ;

K_3 — factorul de amplificare a tensiunii generatorului.

In fig. 4—8, este reprezentată schema complectă a sistemului de reglare, schemă a cărei funcţionare este :

Intr'un regim permanent, valoarea rezistenţei R_4 din punte este astfel aleasă încât potenţialul grilei lămpii electronice a

punţii cu fază variabilă asigură faza necesară a tensiunii dela grilele tiratronilor. Aceasta determină unghiul de aprindere al tiratronilor, unghi la care se obţine curentul de excitaţie necesar $i_{e.g}$, corespunzător sarcinii date a generatorului. Segmentul u_i, determinat pe axa absciselor de intersecţiile cu caracteristica redresată a punţii neliniare, este echivalent cu tensiunea etalon introdusă în sistemul de reglare.

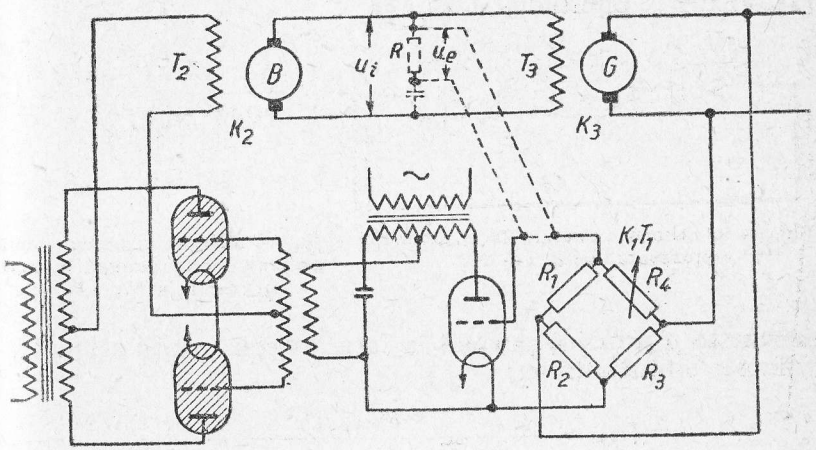


Fig. 4—8. Schema regulatorului de tensiune electro-tiretronic.

Variaţia tensiunii generatorului duce la variaţia rezistenţei R_4 a punţii, fapt care atrage după sine variaţia fazei tensiunii de grilă. Aceasta din urmă schimbă unghiul de aprindere a tiratronilor, modificând prin aceasta curentul de excitaţie a excitatricei şi a generatorului. Dacă schema este conectată corect, variaţia curentului de excitaţie micşorează deviaţia tensiunii dela mărimea dată, până la mărimea care depinde de factorul total de amplificare a sistemului. In fig. 4—9, este reprezentată schema structurală a sistemului de reglare examinat.

Ecuaţia caracteristică, pentru cazul considerat, va fi de forma :

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K_1 K_2 K_3 = 0.$$

Deschizând sistemul în punctul A (fig. 4—9) și aplicând la intrare mărimea $x_0(t)$, se obține la ieșire mărimea $x_3(t)$, în care caz legătura dintre mărimile de intrare și ieșire va fi :

$$\frac{x_3(t)}{x_0(t)} = \frac{K_1 K_2 K_3}{(1+T_1 p)\,(1+T_2 p)\,(1+T_3 p)}.$$

Pentru a putea trasa caracteristica amplitudine-fază, se

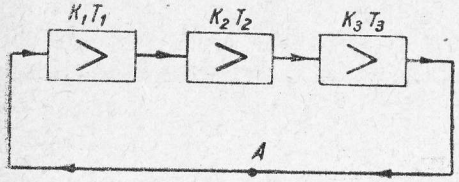


Fig. 4—9. Schema structurală a sistemului reprezentat în fig. 4—8.

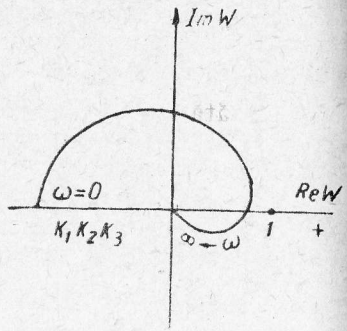


Fig. 4—10. Caracteristica amplitudine-fază a sistemului deschis reprezentat în fig. 4—8.

înlocuește p prin $j\omega$, punând în fața întregii ecuații semnul — (minus), obținându-se :

$$W(j\omega) = -\frac{K_1 K_2 K_3}{(1+T_1 j\omega)\,(1+T_2 j\omega)\,(1+T_3 j\omega)}; \qquad (4-1)$$

stabilitatea sistemului se determină în raport cu poziția punctului $(1,j0)$ față de hodograful vectorului $W(j\omega)$. Poziția caracteristicii amplitudine-fază poate fi stabilită în forma ei generală. Într'adevăr, prin variația numărătorului ecuației (4—1) curba va varia proporțional în toate direcțiile, iar prin variația frecvenței dela zero la ∞, argumentul numitorului va crește numai într'un singur sens. Întrucât în acest caz avem de aface cu trei elemente de relaxare, unghiul de rotație maximă a vectorului $W(j\omega)$, în cazul variației lui ω dela zero la ∞, va fi egal cu $\frac{3}{2}\pi$. Caracteristica amplitudine-fază va avea forma reprezentată în fig. 4—10. Prin variația factorului de amplificare $K_1 K_2 K_3$, se poate transforma sistemul din stabil în nestabil sau invers, sistemul nestabil se poate face stabil, în funcție de mărirea sau micșorarea factorului de amplificare.

Concluzia practică ce se poate trage din exemplul examinat constă în faptul că, în cazul valorilor finite ale constantelor de timp, factorul de amplificare la care sistemul rămâne stabil va fi deasemeni finit.

4—2. CÂTEVA PROPRIETĂȚI ALE SISTEMELOR CU UN SINGUR CIRCUIT

Să arătăm că concluzia obținută în paragraful precedent poate fi extinsă și asupra cazului general când numărul elementelor este oarecare, mai mare de trei.

In cazul unui număr de N elemente de relaxare legate în serie, legătura dintre valoarea la ieșire și valoarea la intrare a unui sistem deschis se va scrie :

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{\prod_{i=1}^{N} K_i}{\prod_{i=1}^{N} (1+T_i p)}, \qquad (4-2)$$

unde Π înseamnă produsul, iar indicele i înseamnă că produsul se extinde asupra tuturor constantelor de timp și factorilor de amplificare ale tuturor elementelor, dela 1 la N.

In ecuația (4—2) înlocuindu-se p prin $j\omega$, se obține ecuația caracteristicii amplitudine-fază :

$$W(j\omega) = \frac{\prod_{i=1}^{N} K_i}{\prod_{i=1}^{N} (1+T_i j\omega)}. \qquad (4-3)$$

Intrucât numărătorul ecuației (4—3) nu conține pe $j\omega$, variația argumentului (4—3), în cazul variației lui ω dela zero la infinit, va fi într'un singur sens ; unghiul de rotație maxim, în acest caz, va fi egal cu $N\frac{\pi}{2}$. Caracteristica amplitudine-fază va fi situată într'un număr de N cadrane. In fig. 4—11, este reprezentată această caracteristică amplitudine-fază. In cazul de față, ca și în cazul exemplului examinat în paragraful precedent, variația factorului total de amplificare al sistemului duce la o variație proporțională a caracteristicii amplitudine-fază. Este clar că, odată cu creșterea factorului total de ampli-

ficare, caracteristica amplitudine-fază se va desface, iar la o valoare oarecare a curentului, punctul $(1, j\,0)$ va fi situat în interiorul caracteristicii amplitudine-fază, adică sistemul va deveni nestabil. Această trăsătură caracteristică a sistemelor cu un singur circuit poate fi formulată în felul următor. In sistemele cu un singur circuit, în care numărul total de elemente este mai mare de doi, există o valoare finită critică a factorului total de amplificare (în cazul constantelor de timp finite).

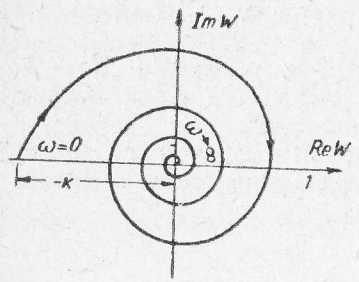


Fig. 4—11. Caracteristica amplitudine-fază a unui sistem de reglare deschis, cu un singur circuit.

Menționând, în aceste sisteme, toți parametrii constanți și mărind factorul de amplificare, se va ajunge inevitabil la valoarea la care sistemul va deveni nestabil; rezultă deci că pentru o valoare a factorului de amplificare mai mare decât cea corespunzătoare regimului critic, sistemul nu va mai fi stabil.

Această concluzie a fost trasă pornid dela examinarea unui sistem compus dintr'un șir de elemente de relaxare legate în serie. Această concluzie este valabilă și în cazul când, în afara elementelor de relaxare, șirul format dintr'un singur circuit va conține și un element oscilator și cel mult un element de integrare.

Dacă șirul format dintr'un singur circuit conține cel mult un singur element de integrare, acest șir corespunde unui sistem structural nestabil.

Particularitățile sistemelor cu un singur circuit examinate, compuse numai din elemente simple, scot în evidență următoarele probleme, care trebue rezolvate în cazul proiectării sistemelor de reglare automată:

1. Sistemul cu un singur circuit conține mai mult decât un singur element de integrare. Acest fel de sistem este nestabil din punct de vedere structural și va fi necesar să fie stabilizat.

2. Parametrii sistemului cu un singur circuit sunt de așa natură încât valoarea critică a factorului de amplificare este

mai mică decât valoarea factorului de amplificare necesar pentru asigurarea preciziei de reglare și a repetării comenzilor. Un astfel de sistem este inutilizabil, fiind necesar a se găsi mijloace pentru mărirea factorului de amplificare critic.

3. Sistemul este stabil, însă caracterul regimului tranzitoriu nu satisface condițiile tehnice. Acest fel de sistem este inutilizabil și este necesar să se găsească mijloacele necesare pentru îmbunătățirea calității reglării.

Pentru a rezolva problemele puse, în sistemul cu un singur circuit se introduc dispozitive auxiliare, numite dispozitive de stabilizare.

4—3. EXEMPLE DE STABILIZARE A SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

Presupunem că prin condițiile tehnice se stabilește că statismul sistemului reprezentat în fig. 4—8 trebue să fie egal cu 0,01, adică factorul de amplificare al sistemului trebue să fie:

$$K = \frac{1}{S} = \frac{1}{0{,}01} = 100.$$

Inafară de aceasta, se dau următoarele valori ale constantelor de timp:

$$T_1 = 0{,}1 \text{ s}; \quad T_2 = 0{,}5 \text{ s}; \quad T_3 = 1 \text{ s}.$$

Se cere să se determine valoarea critică a factorului de amplificare al sistemului reprezentat în fig. 4—8. Ecuația caracteristică a acestui sistem este:

$$(1 + T_1 p)\,(1 + T_2 p)\,(1 + T_3 p) + K_1 K_2 K_3 = 0. \quad (4—4)$$

Conform criteriului lui Routh-Hurwitz, condiția de stabilitate a ecuației de gradul trei cu coeficienți reali și pozitivi este:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (4—5)$$

Deschizând parantezele ecuației (4—4), se obține:

$$\begin{aligned} a_0 &= T_1 T_2 T_3, \\ a_1 &= T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3, \\ a_2 &= T_1 + T_2 + T_3, \\ a_3 &= 1 + K_1 K_2 K_3 = 1 + K, \end{aligned} \quad (4—6)$$

unde

$$K = K_1 K_2 K_3.$$

Inlocuind valoarea coeficienților din ecuația (4—6) în ecuația (4—5), se obține :

$$\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right)(T_1 + T_2 + T_3) - 1 - K > 0. \quad (4-7)$$

Valoarea critică a factorului de amplificare se obține egalând membrul întâi al inegalității (4—7) cu zero :

$$K_{cr} = \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right)(T_1 + T_2 + T_3) - 1.$$

Inlocuind constantele de timp cu valorile lor, se obține :

$$K_{cr} = \left(\frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{1}\right)(0{,}1 + 0{,}5 + 1) - 1 = 19{,}8.$$

Rezultă deci că, în conformitate cu condițiile tehnice impuse, factorul total de amplificare nu trebue să fie mai mic de 100 ; factorul de amplificare critic însă, în cazul constantelor de timp date, este egal cu 19,8. Este evident că, în acest caz, sistemul nu va putea satisface condițiile tehnice.

Să efectuăm o modificare a schemei, astfel cum este indicat în fig. 4—8. Tensiunea înfășurării de excitație se aplică unui circuit format dintr'o rezistență R și o capacitate C în serie ; tensiunea dela bornele rezistenței R se leagă în serie cu tensiunea de ieșire a punții de măsură (linia punctată din fig. 4—8).

Pentru a stabili ecuația elementului introdus în sistem, se scrie ecuația de echilibru electric la intrarea și la ieșirea sistemului. Se găsește :

$$u_i = Ri + \frac{i}{Cp} \quad (4-8)$$

$$u_e = Ri. \quad (4-9)$$

Eliminând pe i din (4—8) și (4—9), se obține :

$$\frac{u_e}{u_i} = \frac{R}{\left(R + \frac{1}{Cp}\right)} = \frac{RCp}{1 + RCp}.$$

Notând constanta de timp a elementului de stabilizare cu $RC = T$, se obține :

$$\frac{u_e}{u_i} = \frac{Tp}{1 + Tp}. \quad (4-10)$$

Schema structurală a unui asemenea sistem este reprezentată în fig. 4—12.

Să stabilim ecuația operațională a sistemului deschis, în cazul deschiderii acestuia în punctul A (fig. 4—12).

Se obține următorul sistem de ecuații :

$$(1 + T_1 p)x_1 = K_1 x_i, \quad (4-11)$$

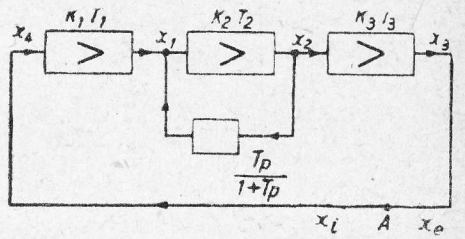


Fig. 4—12. Schema structurală a sistemului reprezentat în fig. 4—8.

$$(1 + T_2 p)x_2 = K_2\left(x_1 - \frac{Tp}{1 + Tp}x_2\right), \quad (4-12)$$

$$(1 + T_3 p)x_e = K_3 x_2. \quad (4-13)$$

Eliminând pe x_1 și x_2 din ecuațiile (4—11), (4—12) și (4—13), se obține :

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{K_1 K_2 K_3 (1 + Tp)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + Tp) + K_2 Tp (1 + T_1 p)(1 + T_3 p)} \quad (4-14)$$

Ecuația caracteristicii amplitudine-fază se obține dacă în ecuația (4—14) se înlocuește p cu $j\omega$, iar în fața părții din dreapta se pune semnul — (minus) :

$$W(j\omega) = -\frac{K_1 K_2 K_3 (1 + Tj\omega)}{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)(1 + T_3 j\omega)(1 + Tj\omega) + K_2 j\omega T (1 + T_1 j\omega)(1 + T_3 j\omega)} \quad (4-15)$$

Spre deosebire de caracteristica amplitudine-fază a sistemului cu un singur circuit, în cazul de față variația argumentului, pentru variația lui ω dela zero la infinit, nu va fi independentă. Această variație va depinde de valorile constantelor

de timp și de factorii de amplificare ai diferitelor elemente. Ea va depinde deasemenea și de locul de conectare [1]) a elementului de stabilizare.

Să arătăm că noul sistem obținut rămâne stabil în cazul când factorul total de amplificare este mai mare decât 100.

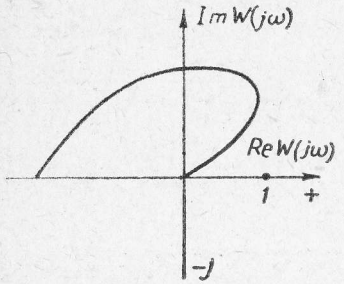


Fig. 4—13. Caracteristica amplitudine-fază a unui sistem deschis în punctul A.

Să presupunem că factorii de amplificare ai diferitelor elemente au valorile:

$$K_1 = 5,$$

$$K_2 = 25,$$

$$K_3 = 1.$$

Factorul de amplificare total:

$$K = K_1K_2K_3 = 1 \cdot 25 \cdot 5 = 125,$$

este mai mare decât factorul de amplificare stabilit prin condițiile tehnice. Se alege constanta de timp $T = 0{,}2$ s.

Inlocuind valoarea factorului de amplificare și a constantelor de timp în ecuația (4—15), se obține:

$$W(j\omega) = \frac{125(1 + 0{,}2j\omega)}{(1+0{,}1j\omega)(1+0{,}5j\omega)(1+j\omega)(1+0{,}2j\omega)+25 \cdot 0{,}2j\omega(1+j\omega)(1+0{,}1j\omega)} \qquad (4-16)$$

In fig. 4—13, este reprezentată caracteristica amplitudine-fază corespunzătoare ecuației (4—16). Punctul (1, $j0$) nu este cuprins de caracteristica amplitudine-fază, prin urmare sistemul este stabil.

Astfel, prin introducerea elementului de stabilizare se poate obține un sistem stabil chiar dacă factorul de amplificare total depășește cu mult factorul de amplificare critic al sistemului fără elementul de stabilizare. Elementul de stabilizare examinat aici este numit uneori legătură elastică inversă sau legătură inversă izodromă.

[1]) Problema conectării corecte a elementului de stabilizare va fi studiată într'un alt capitol.

Să examinăm un al doilea exemplu. In fig. 4—14, este reprezentată schema structurală a sistemului de reglare, compusă din două elemente de relaxare și din două elemente de integrare. In cazul de față, ecuația caracteristică va fi de forma:

$$(1 + T_1p)(1 + T_2p)\,p^2 + K_1K_2K_{a2}K_{a1} = 0$$

sau, deschizând parantezele:

$$T_1T_2p^4 + (T_1 + T_2)p^3 + p^2 + K_1K_2K_{a1}K_{a2} = 0. \qquad (4-17)$$

Coeficienții ecuației (4—17) nu satisfac condițiile de stabilitate, întrucât coeficientul termenului de gradul întâi în p

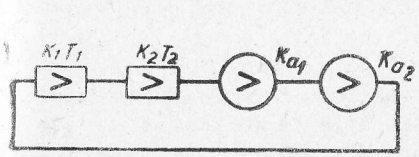


Fig. 4—14. Schema structurală a unui sistem format din două elemente de relaxare și două elemente de integrare.

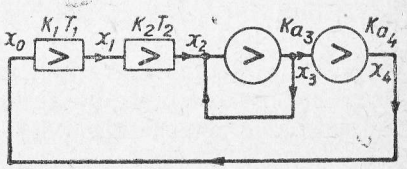


Fig. 4—15. Schema structurală a sistemului reprezentat în fig. 4—14, a cărui unul din elementele de integrare este șuntat printr'o legătură rigidă inversă.

este egal cu zero. Schema din fig. 4—14 face parte din sistemele structural-nestabile. Se modifică schema prin scurtcircuitarea unui element de integrare (fig. 4—15).

Sistemul de ecuații care reprezintă procesele ce au loc în schema din fig. 4—15 este:

$$(1 + T_1p)x_1 = K_1x_0,$$

$$(1 + T_2p)x_2 = K_2x_1,$$

$$px_3 = K_{a3}(x_2 - x_3),$$

$$px_4 = K_{a4}x_3.$$

Se elimină valorile lui x_1 x_2 x_3 și se consideră că $x_4 = -x_0$; se obține următoarea ecuație caracteristică:

$$(1 + T_1p)(1 + T_2p)(T_ap + 1)p + K_1K_2K_{a4} = 0,$$

în care :

$$T_a = \frac{1}{K_{a3}}$$

sau, deschizând parantezele,

$$T_1T_2T_ap^4+(T_1T_2+T_1T_a+T_2T_a)p^3+(T_1+T_2+T_3)p^2+$$
$$+p+K_1K_2K_{a4} = 0.$$

Spre deosebire de ecuația (4—17), în cazul de față coeficienții sunt mai mari decât zero, oricare ar fi gradul lui p, iar sistemul poate deveni stabil pentru anumite valori ale parametrilor, adică sistemul s'a transformat dintr'un sistem structural nestabil într'un sistem structural stabil. Acest fel de stabilizare poate fi explicat după cum urmează.

Să examinăm elementul de integrare la care valoarea de ieșire se aplică la intrare (fig. 4—15); o asemenea conectare se numește legare rigidă inversă. Legătura dintre valorile de ieșire și de intrare este dată de relația :

$$x_3 = K_{a1}\int_0^t (x_2 - x_3)\,dt. \qquad (4-18)$$

Diferențiind ecuația (4—18) în raport cu timpul și înlocuind $\frac{d}{dt}$ cu p, se obține :

$$px_3 = K_{a1}(x_2 - x_3),$$

sau

$$(p + K_{a1})x_3 = K_{a1}x_2. \qquad (4-19)$$

Impărțind relația (4—19) cu K_{a1} și notând $\frac{1}{K_{a1}} = T_a$, se obține :

$$(T_ap + 1)x_3 = x_2.$$

S'a obținut un element de relaxare cu constanta de timp $T_a = \frac{1}{K_{a1}}$ și factorul de amplificare egal cu unitatea. Astfel,

prin introducerea legăturii inverse rigide la un element de integrare, se obține transformarea acestui element într'un element de relaxare și deci sistemul structural nestabil se transformă într'un sistem structural stabil. Aceasta va fi una dintre căile de stabilizare a sistemelor structurale nestabile.

In cazul examinat, mărimea de ieșire a elementului de integrare s'a aplicat integral și negativă la intrarea acestuia. Acest caz corespunde unei legături inverse rigide negative, având factorul de amplificare egal cu unitatea. In anumite cazuri, este util ca la intrare să se aplice numai o parte din mărimea de ieșire. In aceste condiții, ecuația legăturii inverse rigide necomplecte se va scrie :

$$px_3 = K_{a1}(x_2 - \beta x_3). \qquad (4-20)$$

unde β este raportul dintre partea mărimii de ieșire aplicată la intrare și mărimea de ieșire și se numește *factorul legăturii inverse rigide.*

Ecuația (4—20) mai poate fi scrisă :

$$(p + \beta K_{a1})x_3 = K_a x. \qquad (4-21)$$

Impărțind (4—21) cu $K_{a1}\beta$ și notând :

$$\frac{1}{\beta K_{a1}} = T \text{ și } \frac{1}{\beta} = K,$$

se obține :

$$(Tp + 1)x_3 = Kx_2.$$

Acesta va fi un element de relaxare, cu constanta de timp T și factorul de amplificare K.

4—4. CÂTEVA TIPURI DE ELEMENTE ELECTRICE DE STABILIZARE

Să examinăm câteva tipuri de elemente de stabilizare mult folosite în practica industrială.

a) *Lanțul RC*

Acest element de stabilizare este reprezentat în fig. 4—8 prin linii punctate și a fost examinat în paragraful precedent.

b) *Transformator cu flux mic de dispersiune funcționând în gol*

Se presupune că din înfășurarea secundară a transformatorului se ia o putere destul de mică, de exemplu în cazul când înfășurarea secundară a transformatorului este legată în circuitul de grilă a unei lămpi electronice sau când puterea luată este infinit mică în raport cu puterea nominală a transformatorului.

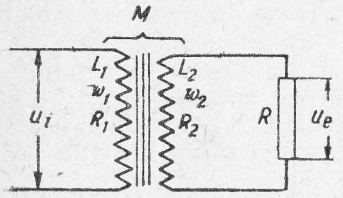


Fig. 4—16. Transformator de stabilizare.

Tensiunea de ieșire se ia dela bornele unei rezistențe de încărcare ca și dela un potențiometru (fig. 4—16).

Să stabilim ecuația operațională a transformatorului.

Ecuația de echilibru electric al înfășurării primare se va scrie (considerând că fluxul de dispersiune este egal cu zero):

$$u_i = R_1 i_1 + w_1 p \Phi, \qquad (4-22)$$

iar a înfășurării secundare:

$$R_2 i_2 + w_2 p \Phi = -u_e$$

Ecuația circuitului megnetic este:

$$\Phi = \frac{i_1 w_1 + i_2 w_2}{R_m}, \qquad (4-24)$$

în care Φ este fluxul total al înfășurării primare și secundare;

w_1, R_1, i_1 — respectiv numărul de spire, rezistența și curentul în înfășurarea primară;

w_2, R_2, i_2 — respectiv numărul de spire, rezistența și curentul din înfășurarea secundară;

R_m — reluctanța circuitului magnetic parcurs de fluxul Φ.

Eliminând pe i_1, i_2, și Φ între ecuațiile (4—22) (4—23) și (4—24) și notând $Ri_2 = u_e$, se obține:

$$\frac{u_e}{u_i} = \frac{\frac{w_1 w_2}{R_m R_1} p}{1 + \frac{w_2^2}{R_m R_2} p + \frac{w_1^2}{R_m R_1}\left(1 + \frac{R_2}{R}\right) p} = \frac{\frac{M}{R_1} p}{1 + \frac{L_2}{R_2} p + \frac{L_1}{R_1} p \left(1 + \frac{R_2}{R}\right)} =$$

$$= \frac{T_1 p}{T_2 p + 1} = \frac{\beta T p}{1 + T p}; \qquad (4-25)$$

în care:

$$\beta = \frac{\frac{M}{R_1}}{\frac{L_2}{R_2} + \frac{L_1}{R_1}\left(1 + \frac{R_2}{R}\right)}; \qquad (4-26)$$

și

$$T = \frac{L_1}{R_1}\left(1 + \frac{R_2}{R}\right) + \frac{L_2}{R_2} \qquad (4-27)$$

este constanta de timp a transformatorului.

Dacă rezistența de încărcare este foarte mare, din expresia (4—25) dispar termenii $\frac{L_2}{R_2}$ și $\frac{R_2}{R}$, însă caracterul general al ecuației se păstrează.

După cum se vede, în toate cele trei cazuri ecuațiile elementelor de stabilizare sunt de același tip. Aceste elemente sunt numite uneori legături elastice inverse sau legături inverse izodrome, prin analogie cu izodromul mecanic, care are aceeași ecuație, dacă se neglijează masa părților mobile.

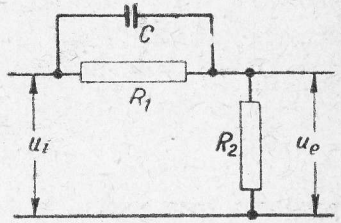


Fig. 4—17. Schema elementului de stabilizare.

Mărimea de ieșire la toate elementele de stabilizare examinate va fi diferită de zero când mărimea de intrare variază în timp și egală cu zero când valoarea de intrare este constantă. Câteodată este util ca la ieșire să existe o mărime diferită de zero, mărimea de intrare fiind constantă, adică paralel cu legătura elastică inversă să existe și o legătură rigidă. In aceste cazuri, pot fi folosite scheme analoage cu cea reprezentată în fig. 4—17.

Să determinăm ecuația operațională a schemei reprezentate în fig. 4—17.

Ecuația de echilibru electric pentru întreg circuitul este:

$$u_i = \frac{\frac{1}{Cp} R_1}{R_1 + \frac{1}{Cp}} i + R_2 i. \qquad (4-28)$$

Pentru tensiunea de ieşire se poate scrie :

$$u_e = R_2 i. \qquad (4-29)$$

Eliminând pe i între ecuaţiile (4—28) şi (4—29), se obţine :

$$\frac{u_e}{u_i} = \frac{R_2}{\frac{1}{Cp} R_1 + R_2} = \frac{R_2}{\frac{R_1}{CR_1 p + 1} + R_2} =$$

$$= \frac{R_1 R_2 Cp + R_2}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 Cp} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cp + \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cp}.$$

Notând : $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = T$ — constanta de timp a circuitului şi

$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \rho$ — coeficientul legăturii rigide inverse, se obţine :

$$\frac{u_e}{u_i} = \frac{Tp + \rho}{1 + Tp} \qquad (4-30)$$

(analogia mecanică a acestui element de stabilizare este izodromul cu neuniformitate reziduală).

In general, prin alegerea circuitelor corespunzătoare, inclusiv cele active, se poate obţine elementul de stabilizare având ecuaţia operaţională :

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{a_0 p^{n_1} + a_1 p^{n_1 - 1} + \ldots + a_{n_1}}{b_0 p^{n_2} + b_1 p^{n_2 - 1} + \ldots + 1}, \qquad (4-31)$$

ale cărei cazuri particulare sunt elementele de stabilizare examinate mai sus. In special, dacă numitorul expresiei (4—31) este egal cu unitatea, iar numărătărul este $T.p$, semnalul de ieşire va fi proporţional cu derivata semnalului de intrare :

$$\frac{x_e}{x_i} = Tp.$$

Dacă numărătorul este egal cu unitatea, iar numitorul este $T\,p$, semnalul de ieşire va fi proporţional cu integrala semnalului de intrare :

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{1}{Tp}.$$

4—5. EXEMPLU DE STABILIZARE A SISTEMULUI DE TRANSMITERE A COMENZILOR

Particularitatea sistemelor de transmitere a comenzilor constă în faptul că valoarea reglabilă (de exemplu : viteza de

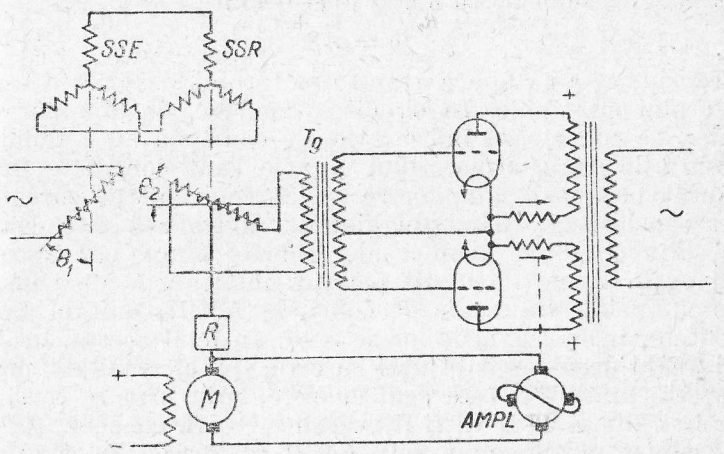


Fig. 4—18. Schema unui sistem de transmitere a comenzilor.

rotaţie a motorului sau unghiul de rotaţie al arborelui acestuia) trebue să reproducă variaţiile sarcinii.

In fig. 4—18, este reprezentată schema tip a unui sistem modern de transmitere. Elementele principale sunt :

1) selsinul emiţător ; 2) selsinul receptor ; 3) amplificatorul electronic ; 4) amplidina ; 5) motorul.

Selsinul receptor funcţionează ca un transformator. Înfăşurările trifazate ale selsinurilor sunt aşezate pe stator, iar cele monofazate, pe rotor. Odată cu rotaţia rotorului, se schimbă poziţia geometrică a înfăşurării monofazate faţă de înfăşurarea

trifazată. Dacă se aplică înfășurării monofazate a selsinului emițător un curent alternativ, atunci în funcție de poziția înfășurării monofazate a selsinului receptor se vor obține următoarele rezultate: când decalajul dintre axele înfășurărilor monofazate este de 90°, nu va exista tensiune în înfășurarea selsinului receptor (această poziție va corespunde poziției de nul, poziției de divergență nulă; dacă însă între acestea va fi un unghi mai mic de 90° (unghiul de divergență δ), atunci, înfășurarea rotorului selsinului receptor se va găsi sub tensiunea:

$$e = A \sin \delta.$$

Luând în considerare numai unghiurile de divergență mici, $\sin \delta$ poate fi înlocuit cu δ și atunci deci:

$$e = A\delta. \qquad (4-32)$$

Tensiunea e se aplică transformatorului de grilă a amplificatorului electronic. In circuitele anodice ale lămpilor electronice, se conectează înfășurările de comandă ale amplidinei. Infășurările transformatorului anodic sunt conectate în așa fel încât pe anozii lămpilor se aplică concomitent curenți de aceeași polaritate. Când unghiul de divergență este egal cu zero, prin circuitele anodice ale ambelor lămpi vor trece curenți egali. Aceeași curenți parcurg înfășurările de comandă a amplidinei. Infășurările de comandă AMPL sunt în așa fel executate, încât fluxurile lor se scad. In felul acesta, în cazul unui unghi de divergență egal cu zero, fluxul rezultant produs de aceste înfășurări este egal cu zero, prin urmare tensiunea la ieșirea din AMPL va fi deasemenea egală cu zero. Rotorul motorului este alimentat dela AMPL; deaceea, în cazul unui unghi de divergență nul, motorul va rămâne imobil.

Să rotim rotorul selsinului emițător cu un unghi oarecare θ_1; între axe va apărea un unghi de divergență, iar la transformatorul de grilă va apărea o tensiune. Această tensiune va închide una dintre lămpile electronice și va deschide pe cealaltă. Ca urmare a acestui fapt, în una dintre înfășurări curentul va crește, iar în cealaltă se va micșora. Diferența fluxurilor înfășurărilor de comandă va fi diferită la zero, iar la ieșirea din AMPL va apărea o tensiune. Motorul fiind alimentat, va începe să se rotească. Arborele lui este cuplat, printr'un reductor, cu rotorul selsinului receptor; deaceea, împreună cu arborele motorului se va roti și rotorul selsinului

receptor. Dacă schema este conectată corect, această rotație va fi dirijată în sensul de micșorare a unghiului de divergență.

Pentru întocmirea schemei structurale, se va scrie ecuația de funcționare a diferitelor elemente ale sistemului. Considerând amplificatorul electronic fără inerție și liniar, se obține relația dintre tensiunea u la ieșirea acestuia și tensiunea e la intrare în acesta:

$$u = K_1 e, \qquad (4-33)$$

în care K_1 este factorul de amplificare de tensiune a amplificatorului.

Să presupunem că AMPL este în întregime compensată și să o reprezentăm prin două grupe de relaxare legate în serie,

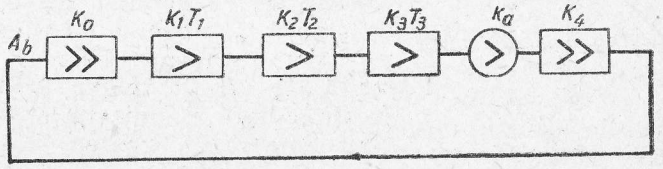


Fig. 4—19. Schema structurală a sistemului reprezentat în fig. 4—18.

având constantele de timp T_1 și T_2 și factorii de amplificare K_2 și K_3:

$$(1 + T_1 p)\,(1 + T_2 p) u_a = K_2 K_3 u; \qquad (4-34)$$

în care u_a este tensiunea la ieșirea din AMPL.

Deoarece în cazul de față se realizează reglarea unghiului de rotație al motorului prin variația tensiunii aplicate la rotorul acestuia, în cazul când curentul de excitație este constant, în conformitate cu (1—17') ecuația motorului se va scrie:

$$p(1 + T_3 p)\varphi = K_4 K_a u_a. \qquad (4-35)$$

Insfârșit,

$$\delta = K_5 \varphi, \qquad (4-36)$$

unde K_5 este raportul de transmisie al reductorului dela arborele motorului la rotorul selsinului receptor.

Pe baza ecauțiilor obținute, se întocmește schema structurală reprezentată în fig. 4—19. Această schemă reprezintă

un circuit format din trei elemente de relaxare și unul de integrare.

Ecuația caracteristică se obține prin eliminarea diverselor tensiuni între ecuațiile (4—32), (4—33), (4—34), (4—35) și (4—36):

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)p + AK_1K_2K_3K_4K_5K_a = 0.$$

Stabilitatea sistemului dat poate fi examinată prin oricare dintre metodele indicate mai sus. Este de observat că acest sistem de transmitere a comenzilor se folosește pentru variația unei singure coordonate, în concordanță cu variația celeilalte. Dacă selsinul considerat se va deplasa cu o viteză constantă v_0, unghiul de divergență va avea o valoare oarecare constantă δ_0. Acest unghi δ_0 se numește eroare stabilizată a transmiterii comenzii. Eroarea stabilizată va fi cu atât mai mică cu cât factorul de amplificare total al sistemului va fi mai mare. In cazul sistemelor moderne, factorul de amplificare are o valoare de ordinul $500 \div 600 \frac{1}{s}$. Pentru constantele reale de timp, sistemul va fi nestabil fără introducere de elemente de stabilizare.

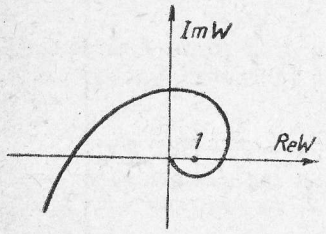


Fig. 4—20. Caracteristica amplitudine-fază a sistemului reprezentat în fig. 4—18.

In fig. 4—20, este reprezentată caracteristica amplitudine-fază corespunzătoare următoarelor date:

$$T_1 = 0{,}008 \text{ s}; \quad T_2 = 0{,}05 \text{ s}; \quad T_3 = 0{,}1 \text{ s}$$

$$K_1K_2K_3K_4K_5AK_a = 600.$$

După cum se vede din figură, punctul $(1, j0)$ se află în interiorul caracteristicii amplitudine-fază, și sistemul este deci nestabil.

Pentru obținerea unei funcționări stabile, se introduce în sistem un dispozitiv de stabilizare având ecuația operațională:

$$\frac{Tp}{1 + Tp} = \frac{u_e}{u_i}.$$

In cazul de față, dispozitivul de stabilizare se va conecta la tensiunea AMPL, iar semnalul de ieșire al acestui dispozitiv se va aplica la intrarea în amplificator. Schema generală structurală este reprezentată în fig. 4—21.

In cazul când $T = 0{,}02$ s, $K_1K_2K_3 = 200$ și $AK_4K_5K = 3$, sistemul este stabil.

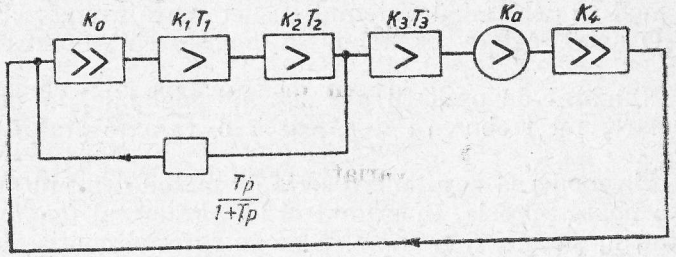


Fig. 4—21. Schema structurală a sistemului reprezentat în fig. 4—18. având introdus elementul de stabilizare.

Din exemplele studiate și considerentele teoretice expuse mai sus, reiese limpede că, în cazul alegerii schemei corespunzătoare și a parametrilor acesteia, se poate obține un sistem stabil de reglare automată și de transmitere a comenzilor.

CAPITOLUL V

CALITATEA SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

In cele ce preced au fost examinate metodele de cercetare a stabilității sistemelor de reglare și cele prin care se poate realiza stabilizarea sistemelor nestabile. După cum s'a menționat însă, de foarte multe ori, stabilitatea impusă unui sistem este o condiție necesară, însă ea este departe de a fi suficientă pentru aplicarea sistemului. Se poate întâmpla ca sistemul de reglare automată să satisfacă condițiile de stabilitate, însă să fie practic inutilizabil, datorită caracterului procesului de reglare.

Deaceea, paralel cu problema stabilității, de foarte multe ori suntem nevoiți să rezolvăm o altă problemă, care poate

fi formulată în felul următor: Care este modul de alegere a structurii sistemului de reglare automată şi a parametrilor acestuia pentru ca curba procesului de reglare să nu depăşească anumite limite, iniţial fixate (B. 18). Aceste limite se pot stabili plecând dela următoarele considerente:

1. Durata procesului de reglare, în cazul unei singure perturbări, nu trebue să depăşească valoarea fixată iniţial. In acest mod se determină sistemul cu acţionare rapidă.

2. O nouă reglare nu trebue să depăşească valoarea stabilită.

3. Numărul de oscilaţii ale mărimii reglabile, în procesul de reglare, nu trebue să depăşească o valoare stabilită anterior.

Teoria modernă cuprinde o serie de metode cu ajutorul cărora se poate aprecia, în primul rând, caracterul fenomenului tranzitoriu, fără a fi necesar să se integreze ecuaţia diferenţială care reprezintă acest fenomen şi, în al doilea rând se poate aprecia, cu suficientă aproximaţie, influenţa parametrilor asupra caracterului procesului de reglare. In acest capitol vor fi examinate aceste metode.

5—1. GRADUL DE STABILITATE

Noţiunea de grad de stabilitate, propusă de Ţâpchin şi Bromberg, constă în aprecierea fenomenului tranzitoriu în raport cu componenta care are constanta de amortizare minimă.

După cum se ştie, soluţia unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi poate fi reprezentată prin expresia:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{z_i t},$$

unde $x(t)$ este abaterea valorii reglabile dela valoarea dată;

A_i — constantele de integrare;

z_i — rădăcinile ecuaţiei caracteristice.

Pentru un sistem stabil, valorile z_i pot fi reale negative sau complexe cu partea reală negativă.

Procesul de reglare se termină când toate componentele fenomenului tranzitoriu se amortizează. Viteza de amortizare

a fiecărei componente (de exemplu prima componentă $A_1 e^{z_1 t}$) se determină prin valoarea absolută a părţii reale a rădăcinii corespunzătoare. Cu cât este mai mare parte reală a rădăcinii, în valoare absolută, cu atât fenomenul se amortizează mai repede.

Dacă una dintre componentele fenomenului tranzitoriu va avea partea reală a rădăcinii minimă [1]), ea se va amortiza mai încet decât toate celelalte. In consecinţă, dacă durata de reglare se determină în raport cu durata de amortizare a rădăcinii a cărei parte reală este cea mai mică (constanta de amortizare este minimă), atunci pentru valorile iniţiale corespunzătoare, durata reală de reglare va fi cu siguranţă mai mică. Dacă durata de amortizare a componentei a cărei constantă de amortizare este minimă este egală sau mai mică decât cea admisă prin condiţiile tehnice ale duratei regimului tranzitoriu, durata reală a fenomenului va fi cu certitudine mai mare. In acest caz, se consideră că fenomenul tranzitoriu se termină după $3 \div 4$ constante de timp, care reprezintă valorile inverse ale părţii reale a rădăcinii minime. In felul acesta, gradul de stabilitate poate asigura numai una dintre condiţiile enumerate mai sus: durata maximă admisibilă a fenomenului tranzitoriu.

Presupunem că ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale a sistemului de reglare este:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (5-1)$$

Impărţind (5—1) cu a_n şi notând:

$$b_i = \frac{a_i}{a_n},$$

se obţine:

$$b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + 1 = 0. \qquad (5-2)$$

Notând:

$$z = \sqrt[n]{b_0 p} \qquad (5-3)$$

şi înlocuind în ecuaţia (5—2), se obţine:

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + 1 = 0, \qquad (5-4)$$

[1]) în valoare absolută.

în care

$$A_1 = \frac{b_1}{\sqrt[n]{b_0^{n-1}}}; \qquad A_i = \frac{b_i}{\sqrt[n]{b_0^{n-i}}}.$$

In conformitate cu criteriul Routh-Hurwitz, pentru ca rădăcinile ecuației (5—4) să fie situate în partea stângă a axei imaginare, este necesar și suficient ca toți determinanții în diagonală din tabloul dat mai jos să fie mai mari decât 0 :

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & \dots \\ 1 & A_2 & A_4 & \dots \\ 0 & A_1 & A_3 & \dots \\ 0 & 1 & A_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & A_n \end{Vmatrix} \qquad (5-5)$$

Din criteriul Routh-Hurwitz se poate stabili că atunci când primele $(n-2)$ elemente ale determinantului sunt mai mari decât zero și $A_n > 0$, determinanțtul $(n-1)$, egalat cu zero, ne dă limita de stabilitate. Această limită se caracterizează prin aceea că cel puțin una dintre perechile de rădăcini conjugate se află situată pe axa imaginară. Dacă toți determinanții sunt mai mari decât zero, iar $A_n = 0$, sistemul se află deasemenea la limita de stabilitate și, în acest caz, o singură rădăcină reală devine zero.

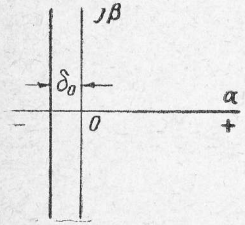


Fig. 5—1. Planul rădăcinilor ecuației caracteristice.

Să facem următoarea schimbare de variabilă :

fie

$$z = y - \delta_0, \qquad (5-6)$$

în care δ_0 este un număr pozitiv.

Dacă, în ecuația (5—4) z este înlocuit cu y din (5—6),axa imaginară se va deplasa paralel cu ea însăși spre stânga, cu valoarea δ_0. Coeficienții ecuației astfel obținute trebue să satisfacă condițiile lui Routh-Hurwitz. Prin aceasta, rădăcinile ecuației (5—4) sunt astfel distribuite în plan încât rădăcina cea mai apropiată de axa imaginară este situată la o distanță cel puțin egală cu δ_0 de această axă (fig. 5—1).

Substituind pe (5—6) în (5—4), se obțin :

$$f(z) = f(y - \delta_0) = (y - \delta_0)^n + A_1(y - \delta_0)^{n-1} + \dots + 1 = 0.$$

Desfăcând parantezele binoamelor și grupând membrii de același grad în y, rezultă :

$$f(y - \delta_0) = y^n + (A_1 - n\delta_0)y^{n-1} +$$

$$+\left[\frac{(n-1)n}{2!}\delta_0^2 - A_1(n-1)\delta_0 + A_2\right]y^{n-2} +$$

$$+\left[-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\delta_0^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\delta_0^2 A_1 - (n-2)\delta_0 A_2 + \right.$$

$$\left. + A_3\right]y^{n-3} + \dots$$

Este ușor de demonstrat (recomandăm ca cititorul să efectueze această demonstrație) că toți coeficienții noii ecuații obținute pot fi determinați cu ajutorul formulei :

$$B_k = \frac{f^{(n-k)}(-\delta_0)}{(n-k)!},$$

în care $f^{(n-k)}(-\delta_0)$ este derivata de ordinul $(n-k)$ a ecuației (5—4), unde z a fost înlocuit cu $(-\delta_0)$; $(n-k)!$ — factorial $(n-k)$, în care se consideră $0! = 1$, iar k ia valori dela 1 la $n-1$.

După efectuarea transformărilor indicate, se obține ecuația în y :

$$f(y) = y^n + \frac{f^{(n-1)}(-\delta_0)}{(n-1)!}y^{n-1} +$$

$$\frac{f^{(n-2)}(-\delta_0)}{(n-2)!}y^{n-2} + \dots + f(-\delta_0). \qquad (5-7)$$

In cazul când coeficienții ecuației (5—7) satisfac condițiile lui Routh-Hurwitz, rădăcinile ecuației inițiale (5—4) vor fi situate la stânga lui δ_0. Aceasta înseamnă că constanta minimă de amortizare va fi mai mare (în valoare absolută) decât δ_0.

Dacă durata relativă a regimului tranzitoriu va fi determinată în raport cu cele patru constante de timp $\frac{1}{\delta_0} \cdot 4$, durata reală a regimului tranzitoriu se va apropia de aceasta.

5—2. EXEMPLU DE UTILIZARE A GRADULUI DE STABILITATE

Să examinăm sistemul de reglare automată ale cărui procese sunt reprezentate printr'o ecuație de gradul 3.

In conformitate cu cele ce preced, ecuația caracteristică poate fi pusă sub forma :

$$f(z) = z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + 1 = 0.$$

Să găsim coeficienții ecuației $f(y)$. Făcând calculul, analog cu cele efectuate mai sus, se obține :

$$B_1 = A_1 - 3\delta_0,$$

$$B_2 = 3\delta_0^2 + A_2 - 2A_1\delta_0,$$

$$B_3 = -\delta_0^3 + A_1\delta_0^2 - A_2\delta_0 + 1,$$

și $f(y)$ se va scrie :

$$f(y) = y^3 + (A_1 - 3\delta_0)y^2 + (3\delta_0^2 - 2A_1\delta_0 + A_2)y +$$

$$+ 1 - A_2\delta_0 + A_1\delta_0^2 - \delta_0^3 = 0. \qquad (5—8)$$

Pentru ca sistemul examinat să aibă gradul de stabilitate necesar δ_0, coeficienții ecuației (5—8) trebue să satisfacă condițiile lui Routh-Hurwitz.

In primul rând, toți coeficienții ecuației (5—8) trebue să fie mai mari decât zero, adică :

$$A_1 > 3\delta_0,$$

$$A_2 < \frac{1}{\delta_0} + A_1\delta_0 - \delta_0^2, \qquad (5—9)$$

$$A_2 > 2A_1\delta_1 - 3\delta_0^2.$$

Inafară de aceasta, determinantul lui Hurwitz, de ordinul doi trebue să fie deasemenea mai mare decât zero. Scriind acest determinant după regula cunoscută, se obține a patra condiție :

$$A_2 > \frac{1}{A_1 - 2\delta_0} + 2\delta_0(A_1 - 2\delta_0). \qquad (5—10)$$

Deci, pentru a se putea asigura un grad de stabilitate care să nu fie mai mic decât δ_0, parametrii sistemului trebue aleși

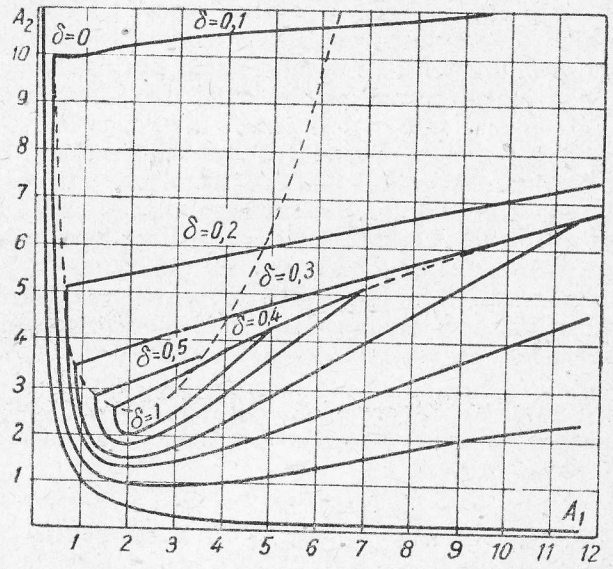


Fig. 5—2. Curbele de grad egal de stabilitate.

în așa fel, încât să fie satisfăcute inegalitățile (5—9) și (5—10). In fig. 5—2, sunt reprezentate curbele care împart planul A_1A_2 în regiuni cu grade de stabilitate cunoscute. Dacă procesul care are loc în acest sistem este reprezentat prin ecuația de gradul trei, atunci, aducându-l la forma în care el depinde numai de doi coeficienți, cu ajutorul curbelor din fig. 5—2 pot fi alese valorile acestor coeficienți astfel încât să se asigure gradul de stabilitate propus.

Gradul de stabilitate examinat în paragraful precedent poate să ne dea o imagine asupra duratei fenomenului tranzitoriu și chiar asupra naturii acestui fenomen. Se poate întâmpla însă ca durata regimului tranzitoriu să corespundă condițiilor tehnice, însă din cauza unui număr mare de oscilații sau a abaterilor mari dela valoarea de reglare, sistemul să nu fie utilizabil.

Inafară de aceasta, trebue să avem în vedere că prin gradul de stabilitate se apreciază durata fenomenului tranzitoriu numai în raport cu rădăcina, fără a se ține seama de condițiile inițiale. Durata procesului de reglare depinde de fapt de caracterul condițiilor inițiale; în special dacă, din cauza condițiilor inițiale, coeficientul termenului soluției care are partea reală a rădăcinii cea mai mică va fi foarte mic, față de coeficienții celorlalte componente, aprecierea duratei fenomenului tranzitoriu în raport cu gradul de stabilitate poate fi nesatisfăcătoare. Metoda frecvenț lor, de examinare a calității sistemului de reglare automată, elaborată de savanții sovietici, s'a dovedit a fi foarte utilă și anume din punctul de vedere al aprecierii fenomenului tranzitoriu în raport cu toate condițiile impuse. La folosirea metodei frecvențelor în vederea examinării calității sistemelor, un rol important l-a avut și îl are V. V. Solodovnicov.

Să presupunem că procesele care au loc în sistemul de reglare automată sunt reprezentate printr'o ecuație diferențială liniară de ordinul n:

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x(t) = f(t), \qquad (5-11)$$

în care $a_0, a_1 \ldots a_n$ sunt coeficienți constanți;
$x(t)$ — valoarea reglabilă;
$f(t)$ — acțiunea perturbatoare.

Presupunem că $f(t)$ poate fi exprimat printr'o ecuație de forma:

$$f(t) = Ue^{j\omega t}. \qquad (5-12)$$

Trebue să observăm că dacă se ia partea reală a ecuației (5—12), aceasta va reprezenta o cosinusoidă de pulsație ω

și amplitudine U, iar dacă se ia partea imaginară și se împarte prin j, se obține o sinusoidă (fig. 5—3).

In aceste condiții, integrala particulară a ecuației(5—11) va fi o funcție de timp, de aceeași formă, însă diferită de funcția perturbatoare prin amplitudine și fază.

Presupunem că soluția particulară a ecuației (5—11) este:

$$x_s = Xe^{j(\omega t+\varphi)}. \qquad (5-13)$$

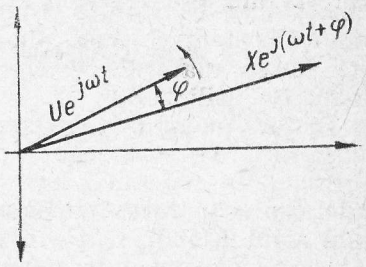


Fig. 5—3. Diagram avectorială a sistemului supus unor perturbații armonice.

In această ecuație, nu sunt cunoscute amplitudinea X și faza φ. Pentru a se determina aceste necunoscute, se procedează astfel:

Dacă relația (5—13) este o soluție, ecuația (5—11) va fi satisfăcută dacă în locul funcției $x(t)$ se pune x_s.

Cele n derivate ale funcției x_s sunt:

$$\begin{aligned} x_s' &= j\omega X e^{j(\omega t+\varphi)}, \\ x_s'' &= (j\omega)^2 X e^{j(\omega t+\varphi)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s^n &= (j\omega)^n X e^{j(\omega t+\varphi)}. \end{aligned} \qquad (5-14)$$

Introducând valorile din (5—14) în ecuația inițială, se obține:

$$a_0(j\omega)^n X e^{j(\omega t+\varphi)} + a_1(j\omega)^{n-1} X e^{j(\omega t+\varphi)} + \ldots + a_n X e^{j(\omega t+\varphi)} = Ue^{j\omega t}.$$

Dând factor comun pe $Xe^{j(\omega t+\varphi)} = Xe^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi}$ și făcând reducerile, se obține:

$$[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n] X e^{j\varphi} = U,$$

de unde:

$$\frac{X}{U} e^{j\varphi} = \frac{1}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n} = K(j\omega). \qquad (5-15)$$

Din ecuația (5—15) rezultă că $\frac{X}{U}\, e^{j\varphi}$ este o funcție de parametrii sistemului și de frecvența funcției perturbatoare.

Eliminând pe X între condițiile (5—15) și (5—13), se obține expresia mărimii reglabile:

$$x_s = UK(j\omega)e^{j\omega t} = U\,|\,K(j\omega)\,|\,e^{j(\omega t+\varphi)}, \qquad (5-16)$$

unde

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} K(j\omega)}{\operatorname{Re} K(j\omega)},$$

unde *Im* este partea imaginară a lui $K(j\omega)$, iar *Re*, partea reală a lui $K(j\omega)$.

Astfel, dacă asupra sistemului de reglare automată liniar acționează o perturbație armonică, care poate fi reprezentată pirntr'o expresie de forma $Ue^{j\omega t}$, mărimea reglabilă poate fi determinată de regimul permanent și este egală cu produsul dintre mărimea perturbatoare și un număr complex oarecare Acesta din urmă nu este altceva decât inversa funcției caracteristice [1]), în care în locul lui p s'a introdus $j\omega$.

Dacă $f(t)$ nu este armonică, ci este o funcție periodică de timp oarecare, soluția ecuației diferențiale poate fi găsită pe aceeași cale ca mai sus. In acest scop, trebue însă ca $f(t)$ să fie descompusă în prealabil într'o serie Fourier, astfel că în locul unei singure frecvențe se va lua întregul spectru de frecvențe.

Să examinăm ceva mai amănunțit acest caz.

Presupunem că $f(t)$ este o funcție periodică (însă nesinusoidală), cu o perioadă T. In cazul îndeplinirii unor anumite condiții [2]) generale, f(t) poate fi reprezentată prin seria lui Fourier:

$$\overset{*}{\mathrm{f}}(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{2}{T}\sum_1\left(a_n\cos\frac{2\pi}{T}\,nt + b_n\sin\frac{2\pi}{T}\,nt\right), \qquad (5-17)$$

[1]) Funcția caracteristică este membrul întâi al ecuației caracteristice (N. Ed).

[2]) Aceste condiții constau în faptul că f(t) este parțial continuu și că $\int_{-\infty}^{+\infty}|\,\mathrm{f}(t)\,|\,dt$ există și este finită.

*) f(t) este egală cu seria respectivă în toate punctele curbei, înafară de punctele de discontinuitate.

unde a_0, a_n și b_n se determină cu ajutorul relațiilor:

$$a_0 = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathrm{f}(t)dt, \qquad a_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathrm{f}(t)\cos\frac{2\pi}{T}\,nt\,dt, \qquad b_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathrm{f}(t)\sin\frac{2\pi}{T}\,nt\,dt. \qquad (5-18)$$

Să exprimăm seria (5—17) sub o altă formă. Folosind formulele lui Euler, se poate scrie:

$$e^{j\omega_n t} = e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \cos\frac{2\pi}{T}\,nt + j\sin\frac{2\pi}{T}nt, \qquad (5-19)$$

$$e^{-j\omega_n t} = e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} = \cos\frac{2\pi}{T}\,nt - j\sin\frac{2\pi}{T}nt. \qquad (5-20)$$

Adunând ecuațiile (5—19) și (5—20), rezultă:

$$\cos\frac{2\pi}{T}\,nt = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{T}nt} + e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\right) \qquad (5-21)$$

și scăzând ecuațiile respective, se obține:

$$\sin\frac{2\pi}{T}\,nt = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{T}nt} - e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\right), \qquad (5-22)$$

de unde:

$$a_n\cos\frac{2\pi}{T}\,nt + b_n\sin\frac{2\pi}{T}\,nt = \frac{1}{2}\left[(a_n - jb_n)\,e^{j\frac{2\pi}{T}nt} + (a_n + jb_n)\,e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\right]. \qquad (5-23)$$

Din relațiile (5—18) pot fi determinate expresiile $(a_n - jb_n)$ și $(a_n + jb_n)$, în funcție de frecvența $\frac{2\pi}{T}\,n$.

Intr'adevăr,

$$a_n - jb_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathrm{f}(t)\cos\frac{2\pi}{T}\,nt\,dt - j\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathrm{f}(t)\sin\frac{2\pi}{T}\,nt\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathrm{f}(t)\,e^{-j\frac{\pi}{T}nt}\,dt = F\left(j\frac{2\pi}{T}n\right); \qquad (5-24)$$

în acelaşi mod,

$$a_n + jb_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\, dt = F\left(-j\frac{2\pi}{T}n\right), \qquad (5-25)$$

întrucât, după cum se ştie, integrala definită este o funcţie a limitelor sale.

Dacă se introduc valorile din (5—24) şi (5—25) în (5—23), se obţine :

$$a_n \cos\frac{2\pi}{T}nt + b_n \sin\frac{2\pi}{T}nt = F\left(j\frac{2\pi}{T}n\right) e^{j\frac{2\pi}{T}nt} + F\left(-j\frac{2\pi}{T}n\right) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}$$

şi seria lui Fourier devine :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[F\left(j\frac{2\pi}{T}n\right) e^{j\frac{2\pi}{T}nt} + F\left(-j\frac{2\pi}{T}n\right) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(j\frac{2\pi}{T}n\right) e^{\frac{2\pi}{T}nt}\Bigg];$$

Dar

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T}n, \text{ şi } T = \frac{2\pi}{\omega}n,$$

şi deci

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(j\omega_n)\, e^{j\omega_n t}\frac{\omega}{n}. \qquad (5-26)$$

In felul acesta, în locul unei funcţii nesinusoidale periodice de timp care acţionează asupra sistemului, se obţine suma armonicelor şi soluţia pentru fiecare armonică în parte se obţine cu ajutorul formulei (5—16). Pentru un sistem liniar, se foloseşte metoda suprapunerii efectelor, iar soluţia generală a acestuia se obţine cu relaţia :

$$x_s = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, K(j\omega)\frac{\omega}{n}. \qquad (5-27)$$

Metoda examinată pentru găsirea soluţiei x_s poate fi generalizată şi extinsă asupra cazului când acţiunea perturbantă este o funcţie aperiodică de timp. O funcţie aperiodică este echivalentă cu o funcţie periodică în care $T \to \infty$. Intrucât însă $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, în cazul când $T \to \infty$, atunci $\omega \to d\omega$.

In aceste condiţii limită, suma din formula (5—26) se transformă într'o integrală, iar funcţia aperiodică de timp se exprimă prin ecuaţia :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \qquad (5-28)$$

In consecinţă, soluţia x_s se determină cu ajutorul relaţiei :

$$x_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, K(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \qquad (5-29)$$

Notând :

$$F(j\omega)\, K(j\omega) = X(j\omega),$$

rezultă :

$$x_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \qquad (5-30)$$

Expresia (5—30) se mai numeşte şi transformarea inversă a lui Fourier. Expresia (5—30) are o raţiune numai dacă integrala :

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} X_s\, e^{-j\omega t}\, dt, \qquad (5-31)$$

există. Atragem atenţia asupra faptului că în (5—31), limitele de integrare sunt luate dela zero la infinit, întrucât considerăm că :

$$x_s = 0 \text{ când } t < 0.$$

Astfel, înainte de a folosi formula (5—30), trebue să fim siguri că integrala $\int_0^\infty |x_s| e^{-j\omega t} dt$ există, adică funcția x_s este absolut integrabilă. Din punct de vedere fizic, aceasta înseamnă că sistemul este stabil, iar perturbația tinde cu timpul către o valoare constantă.

Intrucât $X(j\omega)$ este un număr complex, el poate fi pus sub forma :

$$X(j\omega) = P(\omega) + jS(\omega). \qquad (5-32)$$

Funcția $P(\omega)$ se numește *partea reală a caracteristicii de frecvență a unui sistem închis*, iar $S(\omega)$, partea imaginară a caracteristicii de frecvență a unui sistem închis.

Dacă se exprimă $X(j\omega)$ sub o formă exponențială, se obține :

$$X(j\omega) = X(\omega) e^{j\Theta(\omega)}.$$

Funcția $X(\omega)$ se numește caracteristica amplitudine-frecvență a unui sistem închis, $\Theta(\omega)$ este caracteristica fază-frecvență a sistemului și

$$P(\omega) = X(\omega) \cos \Theta(\omega),$$
$$S(\omega) = X(\omega) \sin \Theta(\omega).$$

Ținând seama de (5—32), relația (5—30) devine :

$$x_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) + jS(\omega)] e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) +$$

$$+ jS(\omega)][\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \cos \omega t -$$

$$- S(\omega) \sin \omega t] d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \sin \omega t + S(\omega) \cos \omega t] d\omega.$$

Ultima integrală este egală cu zero, deoarece $[P(\omega)\sin\omega t + S(\omega)\cos\omega t]$ este o funcție impară și integrala are limite simetrice.

Rezultă deci :

$$x_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \cos \omega t - S(\omega) \sin \omega t] d\omega. \qquad (5-33)$$

Integrala (5—33) reprezintă forma reală a integralei lui Fourier.

Pentru $t < 0$, $x_s = 0$ prin urmare,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \cos \omega t + S(\omega) \sin \omega t] d\omega = 0, \qquad (5-34)$$

dacă în locul lui t se pune $-t$.

Adunând ecuațiile (5—34) și (5—33), se obține :

$$x_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty P(\omega) \cos \omega t \, d\omega.$$

Dacă se scade ecuația (5—33) din (5—34), rezultă :

$$x_s = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty S(\omega) \sin \omega t \, d\omega. \qquad (5-35)$$

Să stabilim relațiile care leagă ecuația fenomenului tranzitoriu cu caracteristica de frecvență, pentru cazul când asupra sistemului acționează o perturbare în formă de impuls unitar.

Presupunem cunoscută caracteristica amplitudine-fază a unui sistem închis $K(j\omega)$. Se va determina valoarea reglabilă x_s pentru oricare interval de timp.

Din teoria fenomenelor tranzitorii se știe că impulsul unitar $1(t)$, pentru intervalul de timp $t > 0$, poate fi reprezentat prin :

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \qquad (5-36)$$

Să exprimăm caracteristica amplitudine-fază a unui sistem închis sub forma :

$$K(j\omega) = H(\omega)\, e^{jB(\omega)} = R(\omega) + jQ(\omega), \qquad (5-37)$$

în care :

$$R(\omega) = H(\omega) \cos B(\omega), \qquad (5-38)$$

$$Q(\omega) = H(\omega) \sin B(\omega). \qquad (5-39)$$

Pentru simplificare, se scrie relația (5—35) sub forma :

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega}\, d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega}\, d(j\omega).$$

Această înlocuire este posibilă, întrucât :

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega}\, d(j\omega) = 0, \text{ iar } \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega}\, d\omega, \qquad (5-40)$$

$\frac{\cos \omega t}{\omega}$ fiind o funcție impară de ω.

După cum s'a arătat mai sus, soluția se poate obține efectuând produsul ecuațiilor (5—40) și (5—37). Astfel, în cazul unei frecvențe egale cu zero, regimul de frecvență se obține înmulțind $\frac{1}{2}$ cu $R(0) = K(0) = H(0)$; prin urmare,

$$x_s = \frac{1}{2} H(0) + \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(\omega)}{\omega}[\cos B(\omega) + j \sin B(\omega)] \times$$

$$\times [\cos \omega t + j \sin \omega t]\, d\omega,$$

sau, ținând seama de ecuațiile (5—38) și (5—39), se obține :

$$x_s = \frac{1}{2} H(0) + \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{R(\omega)}{\omega} + j\frac{Q(\omega)}{\omega}\right][\cos \omega t + j \sin \omega t]\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} H(0) + \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{R(\omega)}{\omega}\cos \omega t - \frac{Q(\omega)}{\omega}\sin \omega t\right] d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{R(\omega)}{\omega}\sin \omega t + \frac{Q(\omega)}{\omega}\cos \omega t\right] d\omega. \qquad (5-41)$$

Prima integrală a ecuației (5—41) este egală cu zero, întrucât expresia de sub semnul integralei este o funcție impară de ω și deci :

$$x_s = \frac{1}{2} H(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{R(\omega)}{\omega}\sin \omega t + \frac{Q(\omega)}{\omega}\cos \omega t\right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} H(0) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{R(\omega)}{\omega}\sin \omega t\, d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega}\cos \omega t\, d\omega. \qquad (5-42)$$

In ecuația (5—42), valoarea reglabilă este legată direct cu caracteristicile de frecvență reală și imaginară. Dacă se ține seama de faptul că $x_s = 0$ pentru $t < 0$, valoarea x_s poate fi legată fie numai de partea reală fie numai de partea imaginară a caracteristicilor de frecvență. Intr'adevăr, pentru $t < 0$, vom avea :

$$x_s(-t) = \frac{1}{2} H(0) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{R(\omega)}{\omega}\sin \omega t\, d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega}\cos \omega t\, d\omega = 0. \qquad (5-43)$$

Scăzând din ecuația (5—42) expresia (5—43), se obține:

$$x_s = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega}\sin \omega t\, d\omega, \qquad (5-44)$$

iar dacă se adună (5—42) cu (5—43), se obține:

$$x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Q(\ )}{\omega}\cos \omega t\, d\omega + H(0). \qquad (5-45)$$

Expresiile obținute stau la baza metodei de studiu a naturii regimului tranzitoriu în raport cu aspectul carcateristicii de frecvență. In acest caz, se poate folosi partea reală sau partea imaginară a caracteristicii de frecvență, care sunt legate direct cu regimul tranzitoriu prin ecuațiile (5—44) și (5—45), sau caracteristica amplitudine-fază, care este legată de părțile reale și imaginară prin ecuațiile (5—38) și (5—39).

5—4. DETERMINAREA PROPRIETĂȚILOR SISTEMULUI CU AJUTORUL CARACTERISTICILOR DE FRECVENȚĂ

Să examinăm cazul când unui sistem i se aplică o acțiune în formă de impuls unitar. Acest caz este interesant prin faptul că el caracterizează un număr mare de sisteme de reglare automată. Afară de aceasta, o acțiune sub formă de impuls este mai dificilă, din punctul de vedere al fenomenului tranzitoriu, decât o acțiune care variază lent.

Legătura dintre regimul tranzitoriu și una dintre caracteristicile de frecvență (reală sau imaginară) a fost determinată în paragraful precedent.

Să determinăm acum ecuația caracteristicii amplitudine-fază a sistemului de reglare închis. Să admitem că raportul dintre mărimea de ieșire și cea de intrare, pentru sistemul deschis, are forma:

$$\frac{x_e}{x_i} = KW(p).$$

Inchizând sistemul, se obține la intrare:

$$\Delta x = x_i - x_e. \qquad (5-46)$$

Pentru sistemul închis, poate fi scrisă următoarea relație de legătură între mărimea de intrare și cea de ieșire (fig. 5—4)

$$KW(p)\,\Delta x = x_e. \qquad (5-47)$$

Substituind, în (5—47), pe Δx cu valoarea lui din (5—46), se obține:

$$(x_i - x_e)\,KW(p) = x_e$$

sau:

$$x_i\,KW(p) = x_e\,[(1 + KW(p)],$$

de unde:

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{KW(p)}{1+KW(p)}.$$

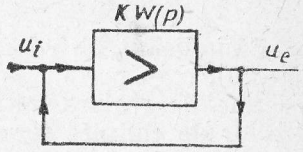


Fig. 5—4. Schemă pentru determinarea funcției tranzitorii a sistemului de reglare închis.

Dacă se înlocuește p cu $j\omega$, se obține ecuația caracteristicii amplitudine-fază:

$$K(j\omega) = \frac{KW(j\omega)}{1 + KW(j\omega)} = H(\omega)\,e^{jB(\omega)} = R(\omega) + jQ(\omega),$$

în care $H(\omega)$ este amplitudinea;
$B(\omega)$ — faza;
$R(\omega)$ — partea reală;
$Q(\omega)$ — partea imaginară a caracteristicii amplitudine-fază a sistemului închis.

Ca și în paragraful precedent, se poate scrie relația dintre aceste două caracteristici:

$$R(\omega) = H(\omega)\cos B(\omega), \qquad (5-48)$$

$$Q(\omega) = H(\omega)\sin B(\omega), \qquad (5-49)$$

$$H(\omega) = \sqrt{[R(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2},$$

$$B(\omega) = \operatorname{arc\,tg}\frac{Q(\omega)}{R(\omega)}.$$

Diferența dintre caracteristicile obținute aici și cele examinate în paragraful precedent constă în faptul că acestea din urmă, afară de proprietățile sistemului însuși, exprimă și spectrul acțiunii de perturbație. Tot aici se întâlnesc proprietățile de frecvență ale sistemului de reglare propriu zis.

Pentru cazul considerat, ecuația (5—44) poate fi scrisă:

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega}\sin \omega t\, d\omega. \qquad (5-50)$$

Să indicăm, fără demonstrație, unele proprietăți ale ecuației (5—50), care permit să se compare și să se aprecieze diferite sisteme de reglare automată din punctul de vedere al condițiilor de calitate formulate mai sus (B. 18).

1. Fie două sisteme, ale căror procese sunt exprimate, respectiv, prin ecuația (5—50):

$$x_1(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega}\sin \omega t\, d\omega$$

și

$$x_2(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P(\omega)}{\omega}\sin \omega t\, d\omega.$$

In cazul când caracteristicile reale de frecvență $R(\omega)$ și $P(\omega)$ pot fi reunite prin variația scării în raport cu axa ω adică dacă:

$$R(n\omega) = P(\omega),$$

$x_2(t)$ decurge de n ori mai repede decât $x_1(t)$, cu alte cuvinte:

$$x_1\left(\frac{t}{n}\right) = x_2(t).$$

2. Fie:

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega}\sin \omega t\, d\omega;$$

dacă $R(\omega)$ este o funcție pozitivă, descrescătoare și continuă $x(t)$ nu poate să depășească 1,18 $R(0)$, în care:

$$R(0) = \lim_{t\to\infty} x(t).$$

3. Dacă, pentru o valoare oarecare ω, caracteristica de frecvență $R(\omega)$ devine infinită, sistemul este nestabil. In acest caz, nestabilitatea este condiționată de prezența unui radical pur imaginar.

4. Durata fenomenului tranzitoriu determinat prin ecuația:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega}\sin \omega t\, d\omega$$

este cu atât mai scurtă cu cât caracteristica de frecvență $R(\omega)$ este mai lină, adică cu cât maximele curbei $R(\omega)$ sunt mai mici în valoare absolută și cu cât $R'(\omega)$ este mai mică în toate punctele curbei.

5. Pentru ca $x(t)$ să tindă în mod

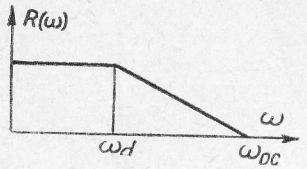


Fig. 5—5. Caracteristică trapezoidală.

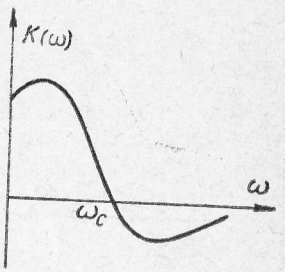


Fig. 5—6. Caracteristică reală de frecvență.

continuu spre starea permanentă $x(\infty)$, este necesar, dar nu suficient, ca $|R(\omega)| < R(0)$ pentru toate valorile lui ω.

6. Dacă $R(\omega)$ este o funcție descrescătoare, continuă și poate fi înlocuită aproximativ printr'un trapez (fig. 5—5), cu intervalul de trecere a frecvențelor ω_o și coeficientul unghiular $\varkappa = \frac{\omega_d}{\omega_{oc}}$, atunci durata fenomenului tranzitoriu va fi cuprinsă între limitele:

$$\frac{\pi}{\omega_{oc}} \leqslant t_0 \leqslant \frac{4\pi}{\omega_{oc}}.$$

In acest caz, zona de trecere a caracteristicii reale de frecvență se numește zona frecvențelor, pentru care

$$R(\omega) > 0 \text{ pentru } \omega < \omega_{oc}$$

și

$$\varkappa = \frac{\omega_d}{\omega}.$$

7. Funcțiilor $R(\omega)$ care au intervalul de pozitivitate ω_c, adică cele care intersectează prima oară axa absciselor la frecvența ω_c (fig. 5—6), le corespunde un $x(t)$ cu o durată a fenomenului tranzitoriu :

$$t_0 > \frac{\pi}{\omega_c}.$$

8. La aprecierea mărimii suprareglării și a duratei fenomenului tranzitoriu, efectul funcției $R(\omega)$ cores-

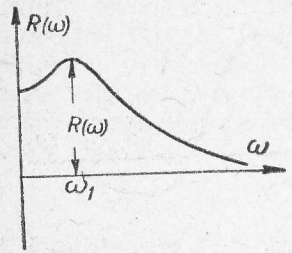


Fig. 5—7. Caracteristică reală de frecvență.

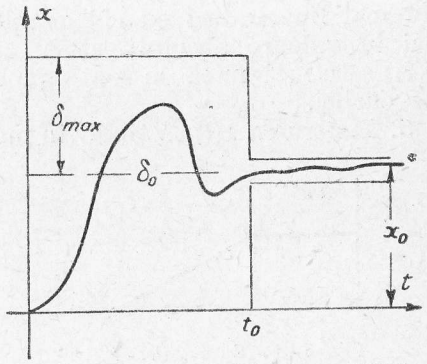


Fig. 5—8. Limita abaterilor admisibile ale mărimii reglate.

punzător frecvenței înalte se neglijează în general, deoarece dacă

$$\left|\frac{R(\omega_1)}{R(o)}\right| < 2{,}0 \text{ pentru } \omega > 10\ \omega_c,$$

maximele funcției $R(\omega)$ pentru frecvențele înalte pot fi neglijate.

In această relație, $R(\omega_1)$ este valoarea maximă reală a caracteristicii de frecvență (fig. 5—7).

V. V. Solodovnicov a propus ca parametrii sistemului de reglare să fie în așa fel aleși, încât caracterisica reală de frecvență să fie cuprinsă între două limite :

$$\int_0^\infty \frac{R_1(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega < \int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega < \int_0^\infty \frac{R_2(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega.$$

In acest caz, curba fenomenului tranzitoriu va fi situată în zona limitată de suprareglarea admisă δ_{max}, cu durata admisă a fenomenului tranzitoriu t_0 și precizia admisă a efectuării reglajului δ_0 (fig. 5—8).

Proprietățile caracteristicilor reale de frecvență expuse mai sus sunt importante în examinarea calității sistemelor și alegerea parametrilor acestora.

5—5. METODA DE CONSTRUIRE A CARACTERISTICILOR DE FRECVENȚĂ ALE UNUI SISTEM INCHIS DE REGLARE AUTOMATĂ

In paragraful precedent au fost examinate unele proprietăți ale caracteristicii reale de frecvență, cu ajutorul cărora poate fi apreciat, cu suficientă aproximație, caracterul procesului de reglare. Deaceea, este foarte important a se putea construi rapid caracteristica reală de frecvență a unui sistem închis.

S'a arătat mai înainte că pentru un sistem închis caracteristica amplitudine-fază se poate scrie :

$$K(j\omega) = \frac{KW(j\omega)}{1 + KW(j\omega)}, \qquad (5—51)$$

în care

$$KW(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{Q(j\omega)}$$

este ecuația caracteristică amplitudine-fază a sistemului închis.

Să examinăm ecuația (5—51) pusă sub o formă puțin diferită. Pentru aceasta, să împărțim numărătorul și numitorul termenului din dreapta cu $W(j\omega)$, obținând :

$$K(j\omega) = \frac{K}{\frac{1}{W(j\omega)} + K} = \frac{K}{\frac{Q(j\omega)}{N(j\omega)} + K}. \qquad (5—52)$$

Insă $-\frac{Q(j\omega)}{N(j\omega)} = K$ reprezintă ecuația limitei împărțirii în D, în raport cu parametrul K. Ne putem convinge de aceasta, scriind ecuația caracteristică a sistemului pentru care s'a stabilit ecuația caracteristicii amplitudine-fază a unui circuit închis. Ecuația caracteristică se obține înlocuind în numitorul expresiei (5—51) $j\omega$ cu p și egalând rezultatul cu zero.

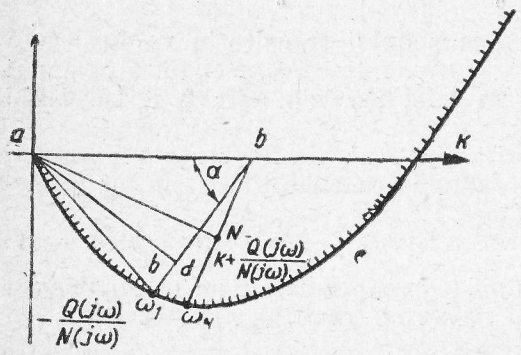


Fig. 5—9. Curba limitei împărțirii în D în raport cu factorul de amplificare. Construirea caracteristicii reale de frecvență.

Se obține:

$$1 + KW(p) = 1 + \frac{KN(p)}{Q(p)} = 0$$

sau

$$Q(p) + KN(p) = 0,$$

de unde rezultă ecuația limitei împărțirii în D:

$$\bar{K} = -\frac{Q(j\omega)}{N(j\omega)}.$$

Să stabilim semnificația geometrică a ecuației (5—52).

In fig. 5—9, este reprezentată curba limitei împărțirii în D în raport cu parametrul $\bar{K}$.

Segmentul $\overline{ab} = K$, segmentul $\overline{ac} = -\frac{Q(j\omega_1)}{N(j\omega_1)}$, pentru frecvența ω_1, iar segmentul $\overline{bc}$ este egal cu suma $K + \frac{Q(j\omega_1)}{N(j\omega_1)}$

De aici, reiese că mărimea câtului împărțirii segmentului $\overline{ab}$ prin segmentul $\overline{bc}$ ne va da amplitudinea (5—52), corespunzătoare frecvenței date. Prin acest procedeu, se poate afla mărimea amplitudinii expresiei (5—52), corespunzătoare oricărei frecvențe.

Argumentul expresiei (5—52), pentru frecvența dată, se va determina prin argumentul numitorului ei. Evident, el va fi egal cu unghiul format de vectorul $\overline{bc}$ cu sensul negativ al axei absciselor, adică unghiul α din fig. 5—9. In acest mod, pentru orice frecvență dată, unghiul de fază se determină direct pe desen.

După determinarea amplitudinii și fazei, pot fi calculate caracteristicile reale și imaginară de frecvență. Aceasta se face însă mai simplu în mod grafic. Intr'adevăr, caracteristica reală de frecvență se obține din ecuația:

$$R(\omega) = H(\omega)\cos B(\omega) = \frac{K}{\left|K + \frac{Q(j\omega)}{N(j\omega)}\right|}\cos B(\omega) = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}\cos\alpha. \quad (5—53)$$

Din punctul a, se coboară, perpendicular pe vectorul $\overline{bc}$, segmentul:

$$\overline{bd} = \overline{ab}\cos\alpha.$$

In acest caz, conform relației (5—53), $R(\omega)$ este egal, pentru orice valoare a frecvenței, cu raportul:

$$R(\omega) = \frac{\overline{bd}}{\overline{bc}}.$$

In mod analog, caracteristica imaginară se obține împărțind segmentul $\overline{ad}$ cu $\overline{bc}$.

5—6. APRECIEREA PREALABILĂ A CALITĂȚII SISTEMULUI DE REGLARE AUTOMATĂ DUPĂ LIMITA IMPĂRȚIRII IN D ȘI ALEGEREA FACTORULUI COMUN DE AMPLIFICARE AL SISTEMULUI

In paragraful precedent au fost expuse metodele de construire a caracteristicilor de frecvență ale unui sistem închis ținând seama de limita împărțirii în D. In prezentul paragraf, vor fi formulate unele proprietăți ale limitei împărțirii în D în raport cu factorul de amplificare comun, cu ajutorul cărora se poate efectua o apreciere prealabilă a fenomenului tranzitoriu, fără a se recurge la construirea caracteristicii reale de frecvență. Aceste proprietăți ale limitei împărțirii în D decurg direct din proprietățile caracteristicilor reale de frecvență formulate mai sus și din legătura dintre caracteristica reală de frecvență și limita împărțirii în D.

1. Pentru ca suprareglarea să nu depășească 18%, este suficient ca:

a) La creșterea frecvenței dela 0 până la ∞, valoarea absolută a vectorului dus din originea coordonatelor într'un

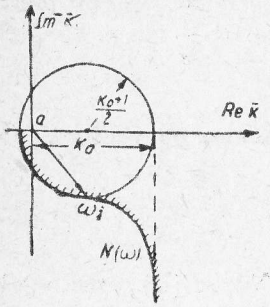


Fig. 5—10. Curba limitei împărțirii în D. Condiții suficiente pentru evitarea unei suprareglări depășind 18%.

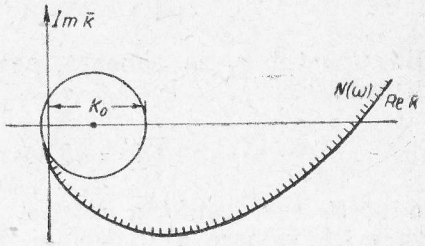


Fig. 5—11. Curba limitei împărțirii în D în raport cu K. Alegerea valorii lui K care asigură caracterul de stabilitate necesară.

punct de pe limita împărțirii în D[pe viitor vom nota limita împărțirii în D cu $N(\omega)$] să crească continuu (fig. 5—10);

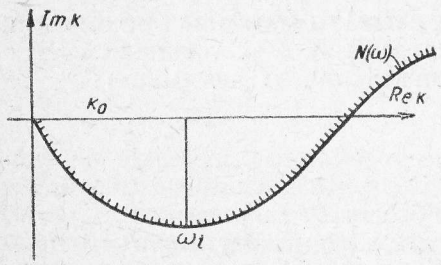


Fig. 5—12. Determinarea benzii de pozitivitate.

b) pentru o valoare dată K_0, curba $N(\omega)$ să nu intersecteze cercul cu centrul în punctul $\frac{K_0+1}{2}$ și raza $\frac{K_0+1}{2}$ (fig. 5—10);

c) proiecția vectorului $a\omega_1$ (fig. 5—10) pe axa K, pentru $\omega \to \infty$, să nu depășească K_0.

Concluzia 1. Pentru ca să fie satisfăcute condițiile necesare evitării depășirii valorii de 18% a suprareglării, mărimea factorului de amplificare al sistemului nu trebue să depășească mărimea diametrului $K_0 + 1$ al cercului (fig. 5—10).

Concluzia 2. Suprareglarea nu va depăși 18% pentru orice factor de amplificare dacă $N(\omega)$ coincide cu axa imaginară a planului K, iar axa reală pozitivă a acestui plan aparține în întregime zonei stabile.

2. Pentru ca funcția tranzitorie $x(t)$ să tindă continuu către valoarea permanentă $x(\infty)$, este necesar (nu însă și suficient) ca $N(\omega)$ să nu intersecteze cercul de rază $\frac{K_0+1}{2}$ și cu centrul situat în $\frac{K_0+1}{2}$ (fig. 5—11).

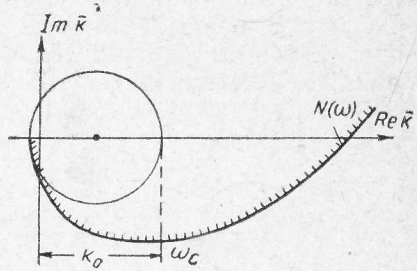


Fig. 5—13. Inlocuirea caracteristicii reale prin trapez.

Concluzia 3. Dacă, din condițiile de precizie, valoarea factorului de amplificare al sistemului este superioară valorii diametrului $K_0 + 1$, fenomenul tranzitoriu nu poate fi continuu.

3. Intervalul de pozitivitate al caracteristicii reale de frecvență, pentru o valoare K_0 dată, se determină prin frecvența (fig. 5—12) corespunzătoare punctului de intersecție a curbei $N(\omega)$ cu perpendiculara ridicată din punctul K_0 pe axa abscizelor.

Durata fenomenului tranzitoriu al acestui sistem este:

$$t > \frac{\pi}{\omega_i}.$$

4. Dacă, la început, curba $N(\omega)$ coincide destul de bine cu cercul cu centrul situat în $\frac{K_0+1}{2}$ și de rază $\frac{K_0+1}{2}$ și apoi distanța dintre cerc și curba $N(\omega)$ crește continuu (fig. 5—13), durata fenomenului tranzitoriu este cuprinsă între limitele:

$$\frac{\pi}{\omega_c} < t < \frac{4\pi}{\omega_c},$$

în care ω_c este intervalul de pozitivitate.

5. Dacă valoarea absolută a vectorului $a\omega_i$ crește continuu cu frecvența $\frac{K_0}{K_{curb}} < 0{,}1 \div 0{,}2$ (fig. 5—14), atunci, după

cum arată calculul, în aprecierea gradului de suprareglare şi a duratei fenomenului tranzitoriu, forma curbei $N(\omega)$, pentru frecvenţe $\omega < \omega_c$, poate fi neglijată.

O particularitate importantă a proprietăţilor curbei $N(\omega)$ formulate mai sus este faptul că ele sunt legate direct cu valoarea factorului comun de amplificare al sistemului.

In aceste condiţii, factorul comun de amplificare ales trebue să asigure îndeplinirea condiţiilor de mai sus (dacă îndeplinirea lor este în general posibilă pentru fiecare caz) [1].

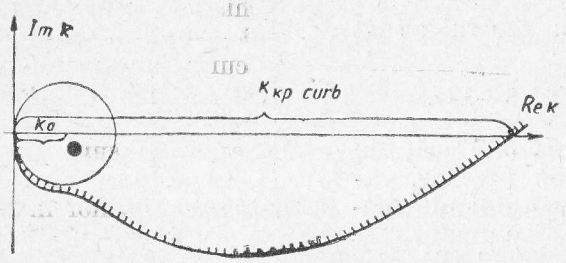


Fig. 5—14. Ilustarea proprietăţii dela punctul 5.

Uneori, este suficient să se aleagă factorul astfel încât caracteristica amplitudine-fază să nu prezinte maxime mari (care să depăşească 1,3; $M \leqslant 1{,}3$), asigurându-se totodată banda maximă de trecere a frecvenţelor. Aceste condiţii decurg direct din proprietăţile caracteristicii reale de frecvenţă, enunţate mai sus.

5—7. DESPRE UTILIZAREA LIMITEI IMPĂRŢIRII IN D IN RAPORT CU ORICE PARAMETRU τ, PENTRU EVALUAREA CALITĂŢII SISTEMULUI DE AUTOREGLARE

In paragraful anterior s'a arătat cum trebue efectuată evaluarea prealabilă a caracteristicii fenomenului tranzitoriu al sistemelor de reglare automată, direct pe limita împărţirii în D, pentru un factor comun de amplificare.

Particularitatea esenţială a acestei metode este aceea că proprietăţile caracteristicii reale de frecvenţă a sistemului

[1]) Trebue avut în vedere că dacă unele condiţii ale caracteristicilor reale de frecvenţă nu sunt îndeplinite, acestea nu înseamnă că sistemul nu poate fi folosit, deoarece aceste condiţii sunt numai suficiente.

închis depindeau direct de valoarea factorului comun de amplificare, ceeace dădea posibilitatea de a se alege valoarea acestuia în aşa fel, încât să se obţină un rezultat cât mai favorabil procesului de reglare.

In acest paragraf, rezultatele date mai sus se generalizează în următoarele direcţii:

1. Se arată cum se determină din limita împărţirii în D, pentru orice parametru şi cu o curbă oarecare construită suplimentar, toate caracteristicile de frecvenţă (printre care şi cea reală) ale sistemului de reglare închis. Se arată cum se poate aprecia influenţa parametrului dat asupra naturii caracteristicii reale de frecvenţă, direct pe curba împărţirii în D şi pe curba construită suplimentar, fără a se construi caracteristica reală de frecvenţă propriu zisă.

2. Rezultatele din paragraful anterior sunt generalizate pentru cazul când asupra sistemului acţionează perturbaţia dată de o lege determinată, în ipoteza condiţiilor iniţiale date.

a) Construirea caracteristicilor de frecvenţă ale sistemului închis pe limita împărţirii în D în raport cu orice parametru.

Să notăm operatorul sistemului deschis cu $KW(p)$, funcţia la intrare cu x_i, iar funcţia la ieşire cu x_e; pentru sistemul închis, în cazul condiţiilor iniţiale zero [1]) se poate scrie:

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{KW(p)}{1+KW(p)}. \qquad (5-54)$$

Scriind caracteristica amplitudine-fază a sistemului deschis sub forma:

$$KW(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{Q(j\omega)} \qquad (5-55)$$

se obţine:

$$K(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{Q(j\omega) + KN(j\omega)}. \qquad (5-56)$$

Dacă la numitorul expresiei (5—56) se înlocueşte $j\omega$ cu p, se obţine ecuaţia caracteristică a sistemului:

$$Q(p) + KN(p) = 0. \qquad (5-57)$$

Să presupunem că interesează influenţa unui parametru oarecare asupra naturii fenomenului tranzitoriu a sistemului

[1]) Se presupune că până la aplicarea perturbării, sistemul se află în repaus.

de reglare. Considerând că acest parametru intră liniar în ecuația caracteristică, relația (5—57) poate fi scrisă:

$$S(p) + \tau M(p) = 0, \qquad (5—58)$$

de unde ecuația limitei împărțirii în D, în raport cu τ se va scrie:

$$\bar{\tau} = -\frac{S(j\omega)}{M(j\omega)}.$$

Ținând seama de relația (5—58), caracteristica amplitudine-fază (5—56) devine:

$$K(j\omega) = \frac{\frac{KN(j\omega)}{M(j\omega)}}{\tau + \frac{S(j\omega)}{M(j\omega)}} \qquad (5—59)$$

Să găsim interpretarea geometrică a ecuației (5—59).

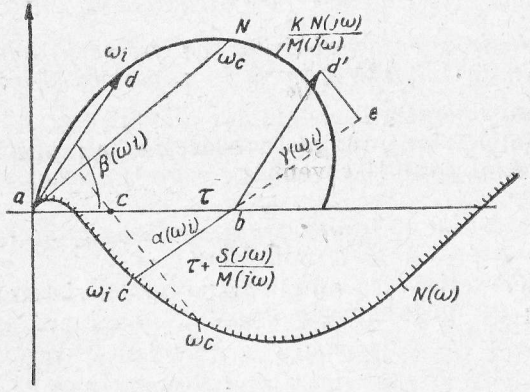


Fig. 5—15. Construirea caracteristicilor de frecvență ale unui sistem închis cu ajutorul curbei limitei împărțirii în D, în raport cu τ (numărătorul nu depinde de τ).

In fig. 5—15, este redată forma posibilă a limitei împărțirii în D. După cum este ușor de văzut direct pe fig. 5—15, vectorul $\overline{cb}$ este egal cu valoarea amplitudinii numitorului corespunzătoare frecvenței ω_i:

$$\overline{cb} = \tau + \frac{S(j\omega_i)}{M(j\omega_i)}.$$

Argumentul numitorului corespunzător frecvenței ω_i este egal cu unghiul $\alpha(\omega_i)$.

Presupunem întâi că $KN(j\omega)$ nu depinde de τ și curba are aspectul din fig. 5—15. Orice vector dus din originea coordonatelor într'un punct oarecare de pe curba $\frac{KN(j\omega)}{M(j\omega)}$ dă amplitudinea și argumentul numărătorului pentru frecvența dată. Admitem că pentru frecvența ω_i, numărătorul relației (5—59) este exprimat prin vectorul $\overline{ad}$. Faza numărătorului corespunzătoare frecvenței ω_i (argumentul vectorului $\overline{ad}$) este egală cu $\beta(\omega_i)$ (fig. 5—15).

Valoarea amplitudinii vectorului (5—59) corespunzătoare frecvenței ω_i se obține prin împărțirea directă a segmentelor de dreaptă $\overline{ad}$ cu $\overline{cb}$ și anume:

$$\frac{\left|\frac{KN(j\omega_i)}{M(j\omega_i)}\right|}{\left|\tau + \frac{S(j\omega_i)}{M(j\omega_i)}\right|} = \frac{\overline{ad}}{\overline{cb}}.$$

In mod analog se poate găsi valoarea amplitudinii vectorului (5—59) pentru orice frecvență și deci toată caracteristica amplitudinii în funcție de frecvență.

Faza vectorului (5—59) se obține făcând diferența dintre fazele numărătorului și numitorului.

Vom arăta cum se poate stabili valoarea caracteristicilor de frecvență ale argumentelor reale și imaginare pentru orice frecvență dată ω_i. Să deplasăm vectorul $\overline{ad}$ din punctul a în punctul b (fig. 5—15) și să prelungim vectorul $\overline{bc}$ cu o linie punctată, astfel cum este indicat în fig. 5—15. După cum se vede în figură, faza vectorului (5—59), pentru această frecvență ω_i, este egală cu $\gamma(\omega_i)$, întrucât:

$$\gamma(\omega_i) = \beta(\omega_i) - \alpha(\omega_i).$$

Valoarea caracteristicii reale de frecvență pentru frecvența ω_i se determină din relația:

$$\frac{\overline{bd'}}{\overline{cb}} \cos\gamma(\omega_i).$$

Să coborîm perpendiculara din vârful vectorului $\overline{bd'}$ pe dreapta punctată; mărimea caracteristicii reale de frecvență pentru ω_i se determină prin raportul segmentelor:

$$R(\omega_i) = \frac{\overline{be}}{\overline{cb}}.$$

Caracteristica imaginară de frecvență (5—59) $L(\omega_i)$, pentru această frecvență, se determină prin raportul segmentelor:

$$L(\omega_i) = \frac{\overline{d'e}}{\overline{cb}},$$

deoarece:

$$L(\omega_i) = \frac{\overline{bd'}}{\overline{cb}} \sin\gamma(\omega_i).$$

Asemenea construcție poate fi efectuată pentru orice frecvență și, în consecință, se pot obține caracteristicile de frecvență ale sistemului închis fără multă pierdere de timp, dacă există împărțirea în raport cu τ și curba $\frac{KN(j\omega)^*)}{M(j\omega)}$.

Este evident că această construcție se poate face pentru orice τ în interiorul regiunii de stabilitate. Practic, este bine a se lua originea curbei $\frac{KN(j\omega)}{M(j\omega)}$ în punctul ales τ; în acest caz, nu va mai fi necesară mutarea vectorilor numărătorului, întrucât originea lor va fi în punctul b.

Presupunem că parametrul τ intră în funcția $KN(j\omega)$ astfel că ea poate fi scrisă:

$$KN(j\omega) = A(j\omega) + \tau B(j\omega). \qquad (5—60)$$

Ținând seama de (5—60), ecuația (5—59) poate fi scrisă:

$$K(j\omega) = \frac{\frac{A(j\omega)}{M(j\omega)} + \tau \frac{B(j\omega)}{M(j\omega)}}{\tau + \frac{S(j\omega)}{M(j\omega)}} \qquad (5—61)$$

*) Trebue de avut în vedere că curba împărțirii D trebue construită pentru studiul stabilității deacceea pentru studiul calității trebue de construit numai curba suplimentară.

In ceeace privește numitorul, el a rămas același și poate fi determinat direct din limita împărțirii în D. Să analizăm mai amănunțit numărătorul.

In fig. 5—16, sunt redate limitele împărțirii în D în raport cu τ și curba $\frac{A(j\omega)}{M(j\omega)}$. Alegem o valoare oarecare τ; pentru fiecare frecvență ω_i, se poate găsi deci valoarea vectorului $\tau \frac{B(j\omega)}{M(j\omega)}$.

Vom lua vectorii $\tau \frac{B(j\omega)}{M(j\omega)}$ pentru frecvențele corespunzătoare

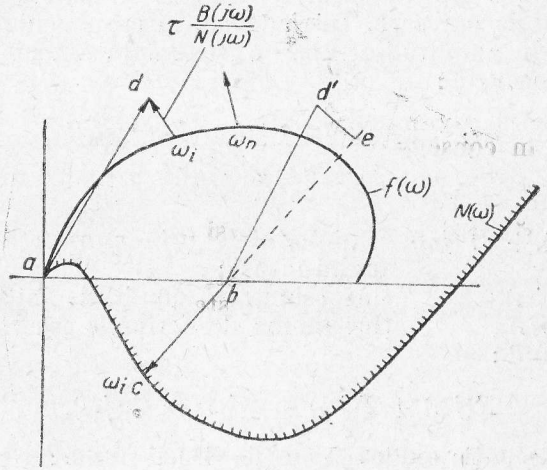


Fig. 5—16. Construirea caracteristicilor de frecvență unui sistem închis cu ajutorul curbei limitei împărțirii în D, în raport cu τ (numărătorul depinde de τ).

ω, după cum se vede în fig. 5—16. Prin schimbarea lui τ, se schimbă numai scara vectorilor respectivi $\tau \frac{B(j\omega)}{M(j\omega)}$.

Pentru o valoare dată τ, valoarea amplitudinii și argumentul numărătorului expresiei (5—61) se determină prin vectorul dus din originea coordonatelor la extremitatea vectorului $\tau \frac{B(j\omega)}{M(j\omega)}$, la frecvența respectivă.

Modul de construire mai departe a caracteristicilor de frecvență este același ca pentru cazul când $KN(j\omega)$ nu depinde de τ.

b) *Asupra luării în considerație a perturbațiilor și condițiilor inițiale.*

Metoda de construire a caracteristicilor sistemului închis expusă în paragraful precedent, pentru cazul condițiilor inițiale zero și al unei perturbații de forma unui impuls unitar, se poate extinde fără dificultate la cazul când perturbația variază după o lege dată și fenomenul tranzitoriu apare în condiții inițiale oarecare. Într'adevăr, în cazul general, ecuația caracteristicii amplitudine-fază a sistemului închis poate fi pusă sub forma [1]):

$$K(j\omega) = \frac{X(j\omega) + \tau\, Y(j\omega) + Z(j\omega) + \rho(j\omega)}{\tau + \dfrac{S(j\omega)}{M(j\omega)}}$$

unde $X(j\omega) + \tau Y(j\omega)$ se determină prin proprietățile sistemului însuși;

$Z(j\omega)$ ține seama de condițiile inițiale;

$\rho(j\omega)$ ține seama de acțiunile perturbatoare.

Insemnând:

$$X(j\omega) + Z(j\omega) + \rho(i\omega) = Q_1(j\omega),$$

se obține o ecuație analoagă cu (5—61) și nume:

$$K(j\omega) = \frac{Q_1(j\omega) + \tau Y(j\omega)}{\tau + \dfrac{S(i\omega)}{M(j\omega)}}. \qquad (5—62)$$

Caracteristicile de frecvență ale sistemului, corespunzătoare ecuației (5—62), se construesc după cum s'a arătat în paragraful anterior.

[1]) Studiul amănunțit al ecuației caracteristicii amplitudine-fază, în cazul general al luării în considerare a perturbațiilor și a condițiilor inițiale, se poate găsi, de exemplu, în articolul lui *V. V. Solodnicov* „Automatizarea și telemecanica", Nr. 2, 1948.

In exemplul concret analizat mai jos se arată modul de construire a caracteristicilor de frecvență ale unui sistem închis în raport cu limita împărțirii în D.

c) *Determinarea naturii fenomenului tranzitoriu și alegerea valorii lui τ.*

Metoda expusă în exemplul anterior permite să se construiască foarte repede caracteristica reală de frecvență pentru o valoare dată τ. Folosind tabela pentru trapezul elementar, se poate stabili fără nicio dificultate fenomenul tranzitoriu [1]).

Existența împărțirii în D în raport cu τ permite să se aleagă direct valorile ei care aparțin regiunii stabile. Luând câteva valori pentru τ și stabilind pentru acestea regimul tranzitoriu, se poate determina valoarea care corespunde naturii optime a regimului tranzitoriu. Un criteriu de caracterizare a naturii regimului tranzitoriu și a influenței valorii τ asupra acestui regim se poate stabili direct din curba împărțirii în D și din curba auxiliară, fără a se recurge la construirea caracteristicii reale de frecvență.

Să formulăm unele proprietăți ale limitei împărțirii în D și ale curbei auxiliare, pe baza cărora se poate efectua o evaluare prealabilă a fenomenului și care servesc ca orientare în alegerea valorii lui τ.

1. Regiunea pozitivității caracteristicii reale de frecvență se determină prin frecvența ω_c, pentru care vectorii numărătorului și numitorului devin pentru prima dată reciproc perpendiculari.

Durata regimului tranzitoriu, la un asemenea sistem, este:

$$t > \frac{\pi}{\omega_c}.$$

Dacă frecvența ω_c este dată, valoarea τ la care ω_c va determina regiunea de pozitivitate se determină astfel: se duce vectorul $\overline{aN}$ al numărătorului corespunzător frecvenței ω_c (fig. 5—15). Din punctul ω_c al limitei împărțirii în D, se coboară perpendiculara pe vectorul $\overline{aN}$; segmentul $\overline{ac}$ va da valoarea căutată τ.

[1]) V. mai jos: Metodele de stabilire a fenomeneloului tranzitoriu.

2. Dacă, pentru un interval inițial oarecare al frecvențelor, raportul dintre valorile absolute ale vectorilor numărătorului și numitorului și unghiul dintre ei $\gamma(\omega)$ sunt practic constante, iar raportul lor se reduce cu condiția că $\gamma(\omega)$ rămâne constant, timpul reglării se află între limitele:

$$\frac{\pi}{\omega_c} < t < \frac{4\pi}{\omega_c}$$

în care ω_c este intervalul de pozitivitate.

3. Condițiile suficiente de evitare a unei noi reglări ca variația suprareglajului să nu depășească 18% se obțin dacă se realizează condițiile dela punctul 2; afară de aceasta, vectorii numărătorului și numitorului nu trebue să devină perpendiculari pentru nicio frecvență.

4. Condițiile necesare pentru excluderea suprareglajului se vor obține dacă la o repartizare egală a frecvențelor dealungul curbei numărătorului și numitorului, modulul vectorului numărătorului va scădea relativ mai repede decât modulul vectorului numitorului pentru frecvențele respective.

Pe baza acestor proprietăți, se poate alege valoarea parametrului care interesează, în așa fel încât procesul să fie cât mai apropiat de cel optim posibil.

5—8. CALCULUL APROXIMATIV AL PROCESULUI DE REGLARE

Există o serie de procedee pentru stabilirea fenomenelor tranzitorii în sistemele de reglare automată. Trebue preferat procedeul care duce la rezultat cu un consum minim de timp și muncă.

Metoda aproximativă redată mai jos se evidențiază prin faptul că pentru stabilirea fenomenului tranzitoriu se utilizează limita împărțirii în D, determinată pentru studiul stabilității și pentru alegerea parametrilor.

Metoda expusă pentru stabilirea fenomenului tranzitoriu se bazează pe ecuația (5—44), stabilită mai sus, care leagă variația valorii reglabile de caracteristica reală de frecvență și anume:

$$x_s = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{R(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega. \qquad (5-63)$$

Pentru a găsi pe x_s, trebue să se efectueze integrarea ecuației (5—63), ceeace, în majoritatea cazurilor, comportă dificultăți considerabile.

Deaceea, se recurge la înlocuirea funcției $R(\omega)$ cu o funcție a cărei integrare nu prezintă dificultăți sau pentru care integrala ecuației (5—63) este cunoscută.

Presupunem că o caracteristică reală de frecvență poate fi aproximativ înlocuită prin două linii drepte secante (B. 20) (fig. 5—17). Ecuația analitică a acestei noi caracteristici, care are forma unui trapez, se poate scrie:

$$R(\omega) = \begin{cases} R(0) & 0 < \omega < \omega_d, \\ R(0)\left[1 - \dfrac{\omega - \omega_d}{\omega_0 - \omega_d}\right] & \omega_d < \omega < \omega_0, \\ 0 & \omega > \omega_0. \end{cases} \qquad (5-64)$$

Rezultă de aici că pentru frecvențele cuprinse între limitele zero și ω_d, caracteristica reală de frecvență este o dreaptă, paralelă cu axa frecvențelor, având ordonata determinată în funcție de valoarea caracteristicii reale pentru $\omega = 0$; pentru frecvențele ω cuprinse între limitele ω_d și ω_0 valoarea $R(\omega)$ scade după dreapta:

$$R(\omega) = R(0)\left[1 - \frac{\omega - \omega_d}{\omega_0 - \omega_d}\right];$$

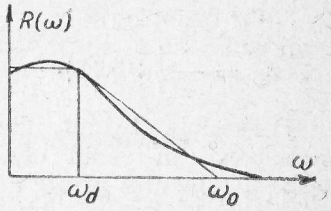


Fig. 5—17. Inlocuirea caracteristicii de frecvneță reală cu una trapezoiadală.

însfârșit, dacă ω este mai mare decât ω_0, caracteristica reală de frecvență este egală cu zero.

Inlocuind, în (5—63), pe $R(\omega)$ cu expresia dată de relațiile (5—64), se obține:

$$x_s = \frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_d} \frac{R(0)}{\omega}\sin\omega t d\omega + \frac{2}{\pi}\int_{\omega_d}^{\omega_0} \frac{R(0)}{\omega}\sin\omega t d\omega - \qquad (5-65)$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_{\omega_d}^{\omega_0} \frac{R(0)}{\omega}\,\frac{\omega - \omega_d}{\omega_0 - \omega_d}\sin\omega t\, d\omega.$$

Dacă se notează

$$\int_0^{\omega_i} \frac{\sin\omega_i t}{\omega}\, d\omega = \mathrm{Si}(\omega_i t),$$

ecuația (5—65) se reduce la următoarea:

$$x_s = \frac{2}{\pi} R(0) \left\{ \mathrm{Si}(\omega_d t) + \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega_d}\left[\mathrm{Si}(\omega_0 t) - \mathrm{Si}(\omega_0 t)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\omega_0 - \omega_d} \frac{\cos\omega_0 t - \cos\omega_d t}{t} \right\},$$

sau, introducând o nouă variabilă $\varkappa = \frac{\omega_d}{\omega_0}$ și presupunând că $\omega_0 = 1$, se obține:

$$x_s = \frac{2}{\pi} R(0) \left\{ \mathrm{Si}(\varkappa t) + \frac{1}{1-\varkappa}\left[\mathrm{Si}(t) - \mathrm{Si}(\varkappa t) + \frac{\cos t - \cos\varkappa t}{t}\right]\right\}$$

Insfârșit, dacă $R(0) = 1$, adică trapezul are înălțimea egală cu unitatea, rezultă:

$$x_{s1} = \frac{2}{\pi}\left\{ \mathrm{Si}\varkappa t + \frac{1}{1-\varkappa}\left[\mathrm{Si}(t) - \mathrm{Si}(\varkappa t) + \frac{\cos t - \cos\varkappa t}{t}\right]\right\}.$$

Formulele obținute dau posibilitatea de a se stabili regimul tranzitoriu în cazul când caracteristica reală de frecvență poate fi înlocuită printr'un trapez sau cu suma câtorva trapeze. In ultimul caz, se determină regimurile tranzitorii pentru fiecare trapez în parte, adunându-se apoi rezultatele.

Pentru determinarea lui $\mathrm{Si}(\varkappa t)$ corespunzător valorii $\varkappa t$, pot fi folosite tabelele pentru $\mathrm{Si}(\varkappa t)$, care se numesc tabelele de sinusuri integrale.

Calculele se simplifică considerabil dacă se utilizează tabela întocmită de V. V. Solodovnicov pentru trapezul $R(0) = 1$ și $\omega_0 = 1$, care este redată în anexă. Folosind această tabelă pentru a determina direct x_{s1}, dacă $\varkappa$ și t sunt cunoscute, și înmulțind x_{s1} cu $R(0)$, se va determina ordonata regimului tranzitoriu corespunzător caracteristicii reale de frecvență trapezoidală dată.

In colncuzie, metoda de calcul aproximativ prin înlocuirea caracteristicii reale de frecvență cu o sumă de trapeze este următoarea.

Presupunem că o caracteristică reală de frecvență are aspectul reprezentat în fig. 5—18. Inlocuim această curbă cu o

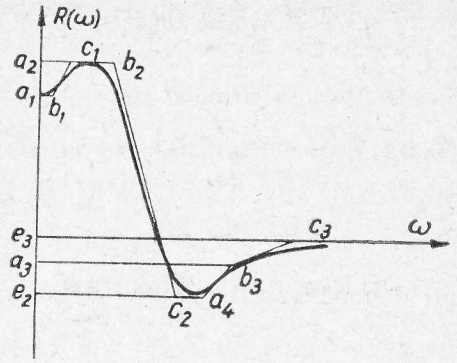


Fig. 5—18. Inlocuirea caracteristicii reale de frecvență cu o sumă de caracteristici trapezoidale.

linie frântă care diferă puțin de aceasta (fig. 5—18) și, prin fiecare punct de intersecție, ducem drepte paralele cu axa frec-

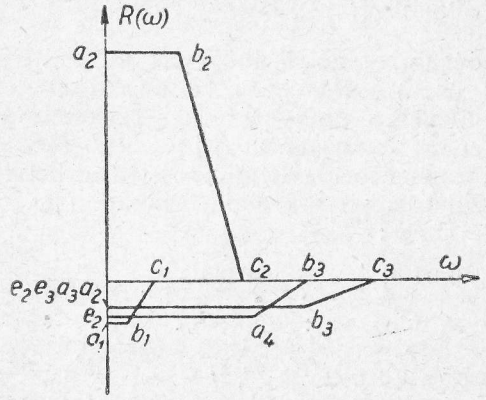


Fig. 5—19. Construirea caracteristicilor trapezoidale corespunzătoare fig. 5—18.

vențelor. Nu este greu de văzut, din fig. 5—19, că linia frântă $R(\omega)$ poate fi obținută prin însumarea a patru trapeze. Astfel,

aproape întotdeauna se poate reprezenta în mod aproximativ caracteristica reală de frecvență prin suma unor trapeze și, pentru determinarea curbei regimului tranzitoriu, poate fi folosită metoda expusă mai sus.

CAPITOLUL VI

PRINCIPII DE CONSTRUIRE A SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

6—1. EXPUNEREA PROBLEMEI

In capitolele precedente au fost analizate metodele de examinare a stabilității și caracterului fenomenelor tranzitorii în sistemele date de reglare automată și alegerea parametrilor. Insă niciuna dintre metodele analizate nu rezolvă următoarea poblemă, care este esențială : dacă schema inițială a sistemului de reglare este just aleasă și dacă nu se poate îmbunătății esențial calitatea sistemului prin schimbarea structurii acestuia, adică prin adăugirea și excluderea sau mutarea unora dintre elementele sale.

Teoria modernă a reglării automate nu poate da un răspuns concludent la această întrebare, ci numai unele reguli, care contribue la alegerea unei structuri raționale a sistemului. Aceste reguli sunt enunțate mai jos.

Să analizăm următorul exemplu. Sistemul de reglaj automat se compune din trei elemente de relaxare (fig. 6 —1), având constantele de timp :

$$T_1 \quad 0{,}01 \text{ s}, \qquad T_2 = 0{,}1 \text{ s}, \qquad T_3 = 0{,}34 \text{ s}$$

și factorii de amplificare :

$$K_1 = 40, \qquad K_2 = 1, \qquad K_3 = 15.$$

Factorul general de amplificare este :

$$K = K_1 K_2 K_3 = 40 \cdot 1 \cdot 15 = 600,$$

iar sistemul, pentru valorile date ale parametrilor fără elemente de stabilizare, nu este stabil. Să încercăm să stabilizăm sistemul

prin introducerea unui element de stabilizare cu funcția operațională :

$$\frac{Tp}{1 + Tp}$$

Se pune întrebarea : în ce mod se poate include elementul de stabilizare? Vom analiza două cazuri.

Să includem elementul de stabilizare în paralel cu primele două elemente (fig. 6 —2) și să examinăm dacă există o valoare

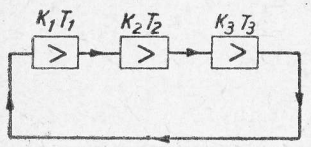


Fig. 6—1. Schema structurală a unui circuit cu un contur.

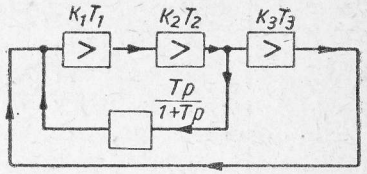


Fig. 6—2. Introduceea elementului de stabilizare în paralel cu elementele *1* și *2* ale conturului principal.

a constantei de timp T a elementului pentru care sistemul este stabil.

In acest scop, să construim curba de împărțire în D în raport cu parametrul $\tau = \frac{1}{T}$ și să cercetăm dacă există un domeniu de stabilitate.

Ecuația caracteristică a sistemului se obține din ecuațiile operaționale ale elementelor separate și este :

$$[(1+T_1p)\,(1+T_2p)\,(1+T_3p)+K_1K_2(1+T_3p)+K_1K_2K_3]p+ \\ +\tau\,[1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)+K_1K_2K_3] = 0. \qquad (6-1)$$

Ecuația curbei limitei de împărțire în D este în acest caz :

$$\tau = -\frac{j\omega[(1+0{,}01j\omega)(1+0{,}34j\omega)(1+0{,}1j\omega)+40(1+0{,}1j\omega)+600]}{(1+0{,}1j\omega)\,(1+0{,}01j\omega)\,(1+0{,}34j\omega)+600}.$$

In fig. 6—3, este dată curba împărțirii în D în raport cu parametrul τ. In regiunea stabilă intră numai segmentul *ab* de pe axa reală pozitivă. Pe acest segment, τ variază dela 0 la 10,2. Pentru a vedea dacă segmentul considerat este cu adevărat situat în domeniul de stabilitate, să verificăm ecuația

(6—1) cu ajutorul criteriului lui Routh-Hurwitz, pentru una dintre valorile lui τ care se află în domeniul *ab*, de exemplu pentru $\tau = \frac{1}{2}$, adică $T = 2$ s. Calculele arată că în cazul când $T = 2$ s, sistemul este nestabil și deci segmentul *ab* nu este situat în regiunea de stabilitate. De aici rezultă că pentru

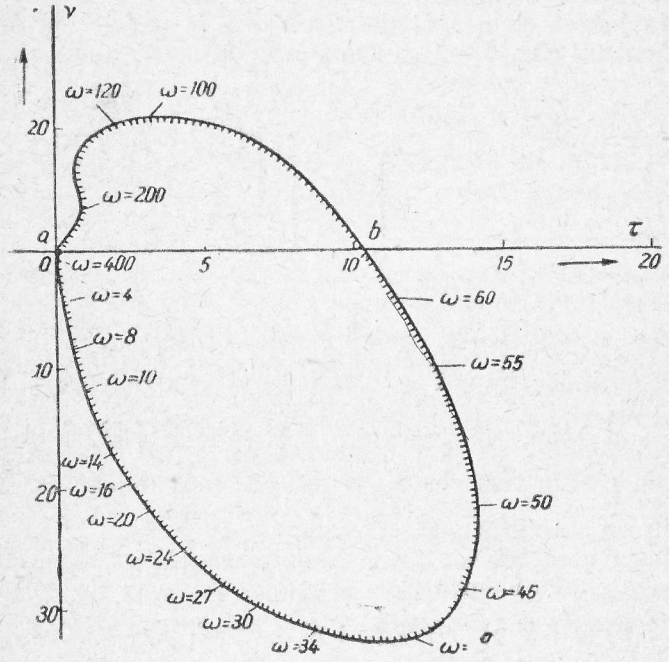


Fig. 6—3. Curba limitei împărțirii în D, în raport cu τ.

nicio valoare a constantei T a elementului de stabilizare, sistemul nu va fi stabil.

Să includem acum, elementul de stabilizare în paralel numai cu primul element de relaxare (fig. 6—4).

In acest caz, ecuația caracteristică se va scrie :

$$(1 + T_1p)\ (1 + T_2p)\ (1 + T_3p)\,(1+ Tp) +$$

$$+ K_1[Tp\ (1 + T_2p)\ (1 + T_3p) + K_2K_3(1 + Tp)] = 0.$$

Introducând în locul constantelor de timp ale elementelor valorile lor și luând de exemplu $T = 0{,}5$, se obține ecuația caracteristică :

$$0{,}00017\,p^4 + 0{,}6995\,p^3 + 9{,}063\,p^2 + 320{,}95\,p + 600 = 0 \quad (6—2)$$

Verificând coeficienții ecuației (6—2) cu criteriul lui Routh-Horwitz, ne convingem că sistemul este stabil. Din exemplul dat aici rezultă că printr'o simplă schimbare a elementului de stabilizare și anume dacă în locul cuplării după schema din fig. 6—2 se va efectua cuplarea după schema 6 — 4, sistemul nestabil devine stabil.

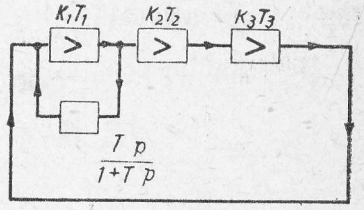


Fig. 6—4. Introducerea elementului de stabilizare în paralel cu elementul $\frac{1}{T}$ al conturului principal.

Ce regulă trebue să fie aplicată în cazul introducerii în sistem a elementelor de stabilizare? Această problemă, care face parte din sinteza sistemelor de reglaj automat, este valabilă pentru o clasă foarte mare și foarte importantă din punct de vedere practic de sisteme de reglaj automat. Din analiza sistemelor cu un singur contur, s'a stabilit că creșterea factorului de amplificare rezultant conduce la nerealizarea stabilității și ca atare toate aceste sisteme au un factor de amplificare critic limitat. Vom analiza, în cele ce urmează, unele legi de realizare a unor sisteme de reglare automată la care din principiu să nu existe această contradicție între stabilitate și precizie, adică a unor sisteme la care factorul de amplificare să poată fi făcut oricât de mare.

Importanța practică a acestei clase de sisteme se datorează următoarelor fapte :

1. Practica modernă cere dela sistem o mare precizie de reglare.

2. Intr'o serie de cazuri se cere un factor mare de amplificare pentru obținerea regimului corespunzător tranzitoriu.

3. Dacă sistemul rămâne stabil, în cazul factorilor de amplificare suficient de mari, se obține o mare libertate în alegerea altor parametri și posibilitatea de a se îmbunătății calitatea sistemului.

Astfel, în acest capitol au fost analizate unele principii de stabilizare a sistemelor având o oscilație finală redusă.

6—2. SISTEMUL DE REGLARE AUTOMATĂ COMPUS DIN N ELEMENTE DE RELAXARE ŞI UN ELEMENT DE STABILIZARE

Să analizăm sistemul de reglare automată format din N elemente de relaxare cuplate în serie, dintre care n elemente sunt cuplate în paralel cu elementul de stabilizare, având funcţia operaţională $\frac{Tp}{1+Tp}$ (fig. 6—5).

Să stabilim ecuaţia caracteristică a sistemului.

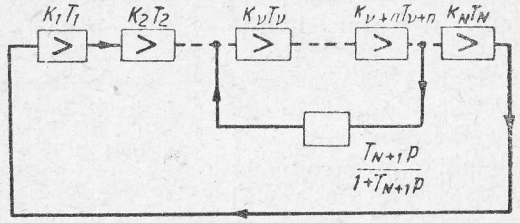


Fig. 6—5. Schema structurală a sistemului cuprinzând un element de stabilizare.

Ecuaţia primei secţiuni a circuitului, dela primul element până la elementul ν, se va scrie :

$$\prod_{i=1}^{\nu}(1+T_ip)x_\nu = K_1K_2\ldots K_\nu\, x_0. \qquad (6-3)$$

Ecuaţia secţiunii dela elementul ν la elementul $(\nu+n)$ este :

$$\prod_{j=\nu+1}^{\nu+n}(1+T_jp)\,x_{\nu+n} = K_{\nu+1}\ldots K_{\nu+n}\left(x_\nu - \frac{T_{N+1}p}{1+T_{N+1}p}\,x_{\nu+n}\right) \qquad (6-4)$$

şi a secţiunii dela elementul $(\nu+n)$ până la elementul N :

$$\prod_{\eta=\nu+n+1}^{N}(1+T_\eta p)x_N = K_{\nu+n+1}\ldots K_N\,x_{\nu+n}. \qquad (6-5)$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii (6—3), (6—4) şi (6—5) (eliminând pe x_ν, $x_{\nu+n}$ şi făcând $x_0 = -x_N$), se obţine ecuaţia caracteristică a sistemului :

$$\prod_{i=1}^{N+1}(1+T_ip)+K_{\nu+1}\ldots K_{\nu+n}\left[T_{N+1}p\prod_{j=1}^{\nu}(1+T_jp)\prod_{\eta=\nu+n}^{N}(1+T_\eta p)+\right.$$
$$\left.+\,K_1K_2\ldots K_\nu K_{\nu+n+1}\ldots K_N(1+T_{N+1}p)\right]=0. \qquad (6-6)$$

Factorul de amplificare total al întregului sistem este egal cu produsul factorilor de amplificare ai elementelor separate. Mărind factorul de amplificare a unui element sau a unei grupe de elemente, vom mări prin aceasta factorul de amplificare total al întregului sistem.

Presupunem $K_{\nu+1}\,K_{\nu+2}\,\ldots\,K_{\nu+n}=K\to\infty$, adică factorii de amplificare a elementelor legate în paralel cu elementul de stabilizare cresc nelimitat.

Împărţind ecuaţia (6—6) cu K şi notând $\frac{1}{K}=m$, se obţine :

$$m\prod_{i=1}^{N+1}(1+T_ip)+\left[T_{N+1}p\prod_{j=1}^{\nu}(1+T_jp)\prod_{\eta=\nu+n}^{N}(1+T_\eta p)+\right.$$
$$\left.+\,K_1K_2\ldots K_\nu K_{\nu+1}\ldots K_N(1+T_{N+1}p)\right]=0. \qquad (6-7)$$

Când $K\to\infty$, $m\to 0$.

Găsind condiţiile pentru ca ecuaţia (6—7) să aibă toate rădăcinile situate în partea stângă a axei imaginare, prin aceasta se va găsi legea de realizare a unui sistem stabil, cu un factor de amplificare oricât de mare.

Notăm cu $F_{N2}(p)$ polinomul care este multiplicat cu m şi cu $F_{N1}(p)$ polinomul cuprins între parantezele drepte (polinomul $F_{N1}(p)$ egalat cu zero se numeşte ecuaţia degenerată).

Cu acestea, ecuaţia (6—7) se va scrie :

$$mF_{N2}(p)+F_{N1}(p)=0. \qquad (6-8)$$

Vom arăta, fără a demonstra [1]), condiţiile de care depinde ca toate rădăcinile ecuaţiei (6—8) să fie situate în partea stângă a axei imaginare.

---

[1]) Demonstraţia se poate găsi în articolul autorului, în revista Vestnic electropromâşlenosti (Buletinul industriei Electrotehnice) 1943, nr. 9.

1. Ecuația degenerată :

$$F_{N1}(p) = 0 \qquad (6-9)$$

trebue să satisfacă condițiile de stabilitate.

2. $$N_2 - N_1 \leqslant 2, \qquad (6-10)$$

în care N_2 este gradul polinomului $F_{N2}(p)$;
N_1 — gradul polinomului $F_{N1}(p)$.

In acest caz, dacă :

a) $N_2 - N_1 = 1$, înafară de condiția 1 trebue să fie satisfăcută și condiția :

$$\frac{B_0}{A_0} > 0, \qquad (6-11)$$

în care B_0 este coeficientul termenului de gradul cel mai înalt al polinomului $F_{N2}(p)$;
și A_0 — coeficientul termenului de gradul cel mai înalt al polinomului $F_{N1}(p)$;

b) $N_2 - N_1 = 2$, înafară de condiția 1 trebue să fie satisfăcută și condiția :

$$\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0, \qquad (6-12)$$

în care B_0 și B_1 sunt coeficienții primilor doi termeni de gradul cel mai înalt ai polinomului $F_{N1}(p)$;

A_0, A_1 — idem ai polinomului $F_{N1}(p)$.

Dacă

$$N_2 - N_1 \geqslant 3, \qquad (6-13)$$

sistemul este nestabil.

Relația (6—13) dă condiția în care trebue legat elementul de stabilizare. In acest scop, vom determina valorile lui N_2 și N_1 în cazul de față.

Din (6—7) rezultă :

$$N_2 = N + 1,$$

și

$$N_1 = N + \nu - \nu - n + 1 = N - n + 1,$$

de unde

$$N_2 - N_1 = N + 1 - N + n - 1 = n.$$

In conformitate cu relația (6—13), pentru stabilitate trebue ca

$$n \leqslant 2, \qquad (6-14)$$

n fiind numărul elementelor legate în paralel cu elementul de stabilizare. De aici rezultă că pentru a se obține un sistem stabil cu nu factor de amplificare oricât de mare, elementul de stabilizare având funcția operațională $\frac{Tp}{1+Tp}$ poate fi cuplat în paralel cu cel mult două elemente de relaxare. Elementul de stabilizare se cuplează uneori ca în schema din fig. 6—6 [1]). In acest caz, rămân valabile toate condițiile date mai sus, cu deosebirea că condiția (6—14) se referă la numărul de elemente care rămân după punctul de conectare a ieșirii elementului de stabilizare.

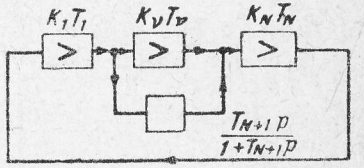


Fig. 6—6. Schema structurală a sistemului cu legătură de stabilizare rapidă.

In general, aceste două cazuri sunt iedntice, dacă se consideră incluse elementele care împreună cu circuitul de reacție formează un circuit închis.

Subliniem că regulele date aici cu privire la cuplarea elementului de stabilizare se referă la cazul când funcția operațională a acestuia este de forma $\frac{Tp}{1+Tp}$. După analiza unei serii de cazuri, interesante din punct de vedere practic, date în paragraful următor va fi analizat, modul de cuplare a unui element de stabilizare de un tip mai general.

6—3. UTILIZAREA ELEMENTELOR DE STABILIZARE IN SISTEMELE FORMATE DIN TREI ȘI PATRU ELEMENTE DE RELAXARE

Să analizăm sistemele de reglaj automat formate din trei și patru elemente de relaxare și un element de stabilizare de tipul $\frac{Tp}{1+Tp}$. Asemenea sisteme prezintă un interes practic

[1]) O astfel de cuplare este numită uneori legătură de stabilizare rapidă.

considerabil prin numărul lor mare. Inafară de aceasta, cu ajutorul acestor noi sisteme, vom stabili unele particularități de cuplare a elementului de stabilizare în funcție de numărul total de elemente.

In fig. 6—7, este reprezentat un sistem format din trei elemente, în care elementul de stabilizare este cuplat în paralel cu primul element.

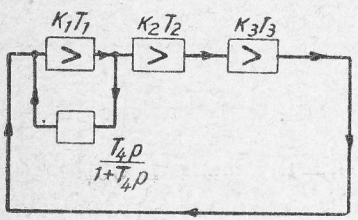


Fig. 6—7. Schema structurală.

Ecuația caracteristică, pentru acest caz, se va scrie:

$$\prod_{i=1}^{4}(1+T_ip)+$$
$$+K_1[T_4p(1+T_2p)(1+T_3p)+$$
$$+K_2K_3(1+T_4p)]=0, \quad (6-15)$$

unde K_1, K_2, K_3 sunt factorii de amplificare ai elementelor de bază;

T_1, T_2, T_3 — constantele de timp;

T_4 — constanta de timp a elementului de stabilizare.

Presupunem $K_1 \to \infty$.

Impărțind ecuația (6—15) cu K_1 și notând:

$$\frac{1}{K_1}=m,$$

se obține:

$$m\prod_{i=1}^{4}(1+T_ip)+[T_4p(1+T_2p)(1+T_3p)+$$
$$+K_2K_3(1+T_4p)]=0. \quad (6-16)$$

Ecuația trebue să satisfacă condițiile (6—9) și (6—11) (întrucât $N_2-N_1=1$). Pentru îndeplinirea condițiilor de stabilitate, ecuația degenerată [o parte din ecuația (6—16), care se află în parantezele drepte] trebue să satisfacă condițiile lui Routh-Hurwitz și deci raportul $\frac{B_0}{A_0}$ trebue să fie mai mare decât zero. Se pot alege întotdeauna valori pentru K_2K_3 astfel încât să satisfacă condiția (6—9). In cazul acesta însă, fac-

torul total de amplificare $K=K_1K_2K_3$ poate fi oricât de mare, K_1 putând fi ales oricum, și deci sistemul va satisface condiția de bază.

Condiția (6—11) se realizează deasemenea; într'adevăr,

$$B_0=T_1T_2T_3T_4,$$
$$A_0=T_2T_3T_4,$$
$$\frac{B_0}{A_0}=\frac{T_1T_2T_3T_4}{T_2T_3T_4}=T_1>0.$$

Stabilitatea ecuației degenerate (6—16) poate fi obținută, pentru orice valoare K_2 K_3 a elementelor finale, prin alegerea justă a constantei de timp a elementului de stabilizare. Intr'adevăr fie:

$$T_4 \geqslant \frac{T_2T_3}{T_2+T_3}. \quad (6-17)$$

Aplicând ecuației degenerate criteriul lui Routh-Hurwitz și ținând seama de (6—17), se găsește că condițiile de stabilitate sunt satisfăcute pentru orice valoare a lui K_2 și K_3. In consecință, K_2 și K_3 pot fi alese fără a se porni dela condițiile de stabilitate a ecuației degenerate, ci pornind dela așezarea cea mai favorabilă a rădăcinilor ei. Intr'adevăr, fiindcă sistemul rămâne stabil pentru orice valoare a lui K_2 și K_3, avem deplina libertate în alegerea acestora. Efectuând împărțirea în D în raport cu K_2K_3, se poate determina direct valoarea acestora pentru care se obține cea mai favorabilă caracteristică reală de frecvență.

Cuplăm acum elementul de stabilizare în paralel cu două elemente, fig. 6—8. In acest caz, ecuația caracteristică va fi:

$$\prod_{i=1}^{4}(1+T_ip)+K_1K_2[T_4p(1+T_3p)+$$
$$+K_3(1+T_4p)]=0. \quad (6-18)$$

Impărțind (6—18) cu K_1K_2 și presupunând K_1K_2 un număr destul de mare, se obține:

$$m\prod_{i=1}^{4}(1+T_ip)+T_4p(1+T_3p)+K_3(1+T_4p)=0.$$

In acest caz, ecuația degenerată este o ecuație de gradul doi cu coeficienții pozitivi și constanți și ca atare satisface condițiile lui Routh-Hurwitz pentru orice valoare a lui K_3. Intrucât, în acest caz $N_2 - N_1 = 2$, este necesar de verificat și relația (6—12). Avem :

$$B_0 = T_1 T_2 T_3 T_4,$$

$$B_1 = T_1 T_2 T_3 + T_1 T_2 T_4 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4,$$

$$A_0 = T_3 T_4,$$

$$A_1 = T_4(1 + K_3)$$

și

$$\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_4} - \frac{K_3}{T_3} > 0$$

sau

$$K_3 < T_3\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_4}\right). \qquad (6-19)$$

Condiția (6—19) fixează limita superioară a factorului de amplificare a ecuației pentru care întreg sistemul rămâne stabil.

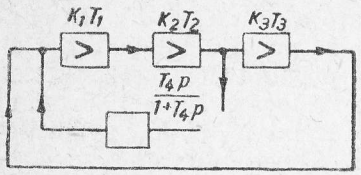


Fig. 6—8. Schema structurală.

Cu ajutorul relației (6—19), este ușor a se determina cauza nestabilității exemplului analizat la începutul acestui capitol. Intr'adevăr, înlocuind, în (6—19) valorile constantelor exemplului analizat, găsim $K_3 < 0{,}1\left(\frac{1}{0{,}01} + \frac{1}{0{,}34} + \frac{1}{0{,}5}\right) = 10{,}5$, deci pentru ca sistemul să fie stabil este necesar să avem $K_3 < 10{,}5$ mai mic decât valoarea reală dată care este 15.

Să analizăm acum sistemul compus din patru elemente de relaxare legate în serie cu o legătură de stabilizare, care cuprinde două elemnte în paralel (fig. 6—9). Ecuația caracteristică a acestui sistem este :

$$\prod_{i=1}^{5}(1 + T_i p) + K_1 K_2 [T_5 p (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_3 K_4 (1 + T_5 p)] = 0, \qquad (6-20)$$

sau, împărțind (6—20) cu $K_1 K_2$ și considerăând $K_1 K_2$ suficient de mare, se obține :

$$m \prod_{i=1}^{5}(1 + T_i p) + T_5 p (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_3 K_4 (1 + T_5 p) = 0.$$

In acest caz, ecuația degenerată este o ecuație de gradul 3 și prin alegerea corespunzătoare a constantelor dispozitivului de stabilizare sau a valorii $K_3 K_4$, este posibil de a satisface condițiile lui Routh-Hurwitz. Diferența $N_2 - N_1$ este egală aici cu doi și deaceea trebue verificată și condiția (6—12) :

$$\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_4} + \frac{1}{T_5} - \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_4} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_5} > 0,$$

ceeace deasemenea se realizează.

Acest caz este interesant prin faptul că, printr'o simplă cuplare în serie a elementelor de relaxare, a fost înlăturată condiția (6—19). Rezultă deci că în sistemele cu trei elemente, este rațional a se cupla elementul de stabilizare în paralel cu un element de relaxare, iar la sistemele cu patru elemente în paralel, cu două elemente de relaxare.

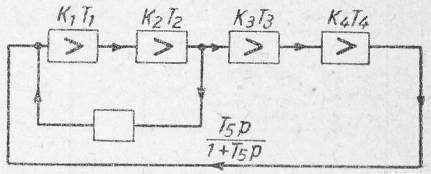


Fig. 6—9. Schema structurală.

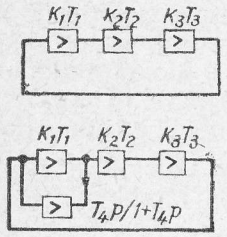
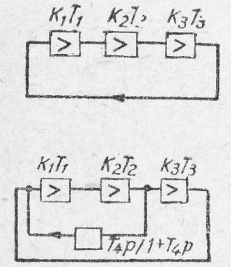
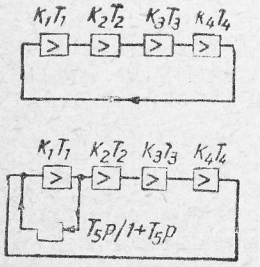
Fără a efectua calcule elementare, vom da rezultatele analizei sistemelor cu trei sau patru elemente, în tabela 6—1. Rezultatele analizelor analoage pentru sisteme de transmitere a comenzilor sunt date în tabela 6—2.

Din analiza tabelelor, se pot trage următoarele concluzii :

1. Pentru obținerea unui sistem stabil, pentru un factor de amplificare oricât de mare, în cazul a trei elemente de relaxare, este necesar a avea un element cu factor de amplficare suficient de mare, cu care se cuplează în paralel elementul de stabilizare.

2. In sistemul cu patru elemente, elementul de stabilizare se cuplează în paralel cu două elemente de relaxare. Produsul

TABELA 6–1

Nr. crt.	Schema elementelor de bază și schema cu elementul de stabilizare cuplat	Ecuația caracteristică a sistemului cu elementul de stabilizare cuplat și ecuația degenerată	Condițiile de stabilitate[1]
1		$\Pi(1+pT_i)+K_1[(1+pT_2)\times(1+pT_3)pT_4+K_2K_3(1+pT_4)]=0$ $(i=1,2,3,4)$ $(1+pT_2)\ (1+pT_3)pT_4+K_2K_3(1+pT_4)=0$	K_1 este suficient de mare $T_4 \geqslant \dfrac{T_2\,T_3}{T_2+T_3}$
2		$\Pi(1+pT_i)+K_1K_2[pT_1\times(1+pT_3)+K_3(1+pT_4)]=0$ $(i=1,2,3,4)$ $pT_4(1+pT_3)+K_3(1+pT_4)=0$	1) K_1K_2 este suficient de mare 2) $K_3 < \left(\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}+\dfrac{1}{T_4}\right)T_3$
3		$\Pi(1+pT_i)+K_1[pT_5\times(1+pT_2)\times(1+pT_3)\times(1+pT_4)+K_2K_3K_4\times(1+pT_5)]=0$ $(i=1,2,3,4,5)$ $pT_5(1+pT_2)\ (1+pT_3)\times(1+pT_4)+K_2K_3K_4\times(1+pT_5)=0$	1) K_1 este suficient de mare 2) Ecuația degenerată satisface condițiunile lui Hurwitz.

[1] Având în vedere stabilitatea în cazul creșterii nelimitate a factorului general de amplificare.

Tabela 6–1 (continuare

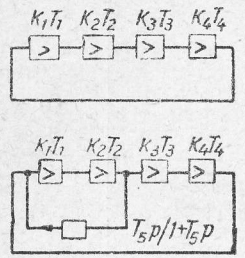
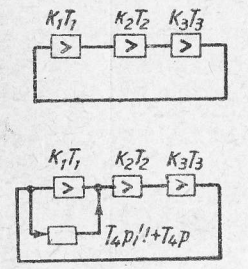
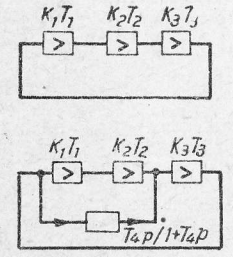
Nr. crt.	Schema elementelor de bază și schema cu elementul de stabilizare cuplat	Ecuația caracteristică a sistemului cu elementul de stabilizare cuplat și ecuația degenerată	Condițiile de stabilitate
4		$\Pi(1+pT_i)+K_1K_2[pT_5\times(1+pT_3)\times(1+pT_4)+K_3K_4(1+pT_5)]=0$ $(i=1,2,3,4,5)$ $pT_5(1+pT_3)\ (1+pT_4)+K_3K_4(1+pT_5)=0$	K_1K_2 este suficient de mare $T_5 \geqslant \dfrac{T_3\,T_4}{T_3+T_4}$
5		$\Pi(1+pT_i)+K_2K_3[pT_4\times(1+pT_4)+K_1(1+pT_4)]=0$ $(i=1,2,3,4)$ $pT_4(1+pT_1)+K_1\times(1+pT_4)=0$	1) K_2K_3 este suficient de mare 2) $K_1 < \left(\dfrac{1}{T_2}+\dfrac{1}{T_3}+\dfrac{1}{T_4}\right)T_1$
6		$\Pi(1+pT_i)+K_3[(pT_4\times(1+pT_1)\times(1+pT_2)+K_1K_2(1+pT_4))=0$ $(i=1,2,3,4)$ $pT_4(1+pT_1)\ (1+pT_2)+K_1K_2(1+pT_4)=0$	K_3 este suficient de mare $T_4 \geqslant \dfrac{T_1\,T_2}{T_1+T_2}$

Tabela 6—1 (continuare)

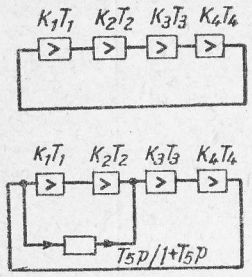
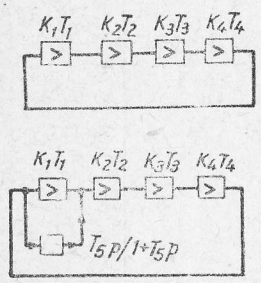
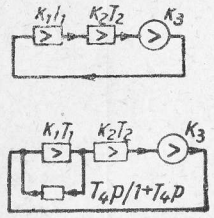
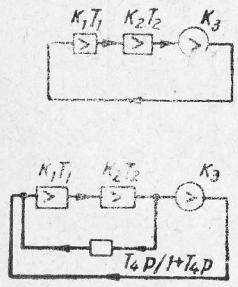
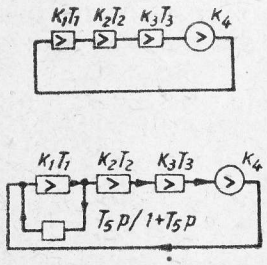
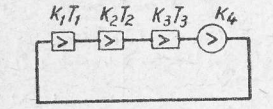
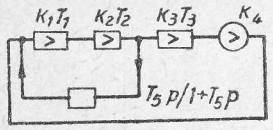
Nr. crt.	Schema elementelor de bază și schema cu elementul de stabilizare cuplat	Ecuația caracteristică a sistemului cu elementul de stabilizare cuplat și ecuația degenerată.	Condițiile de stabilitate
7		$\Pi(1+pT_i)+K_2K_3K_4\times$ $\times[pT_5(1+pT_1)+$ $+K_1(1+pT_5)]=0$ $(i=1,2,3,4,5)$ $pT_5(1+pT_1)+$ $+K_1(1+pT_5)=0$	$K_2K_3K_4$ este suficient de mic
8		$\Pi(1+pT_i)+K_3K_4[pT_5\times$ $\times(1+pT_1)\ (1+pT_2)+$ $+K_1K_2(1+pT_5)]=0$ $(i=1,2,3,4,5)$ $pT_5(1+pT_1)\ (1+pT_2)+$ $+K_1K_2(1+pT_5)=0$	K_3K_4 este suficient de mare $T_5 \geqslant \frac{T_1T_2}{T_1+T_2}$

TABELA 6—2

Nr. crt.	Schema elementelor de bază și schema cu elementul de stabilizare cuplat	Ecuația caracteristică a sistemului cu elementul de stabilizare cuplat și ecuația degenerată.	Condițiile de stabilitate
1		$p\Pi(1+T_ip)+K_1[T_4p^2\times$ $\times(1+T_2p)+K_2K_3\times$ $\times(1+T_4p)]=0$ $(i=1,2,4)$ $T_4p^2(1+T_2p)+$ $+K_2K_3(1+T_4p)=0$	K_1 este suficient de mare $T_4 > T_2$
2		$p\Pi(1+T_ip)+K_1K_2[p^2T_4+$ $+K_3(1+T_4p)]=0$ $(i=1,2,4)$ $T_4p^2+K_3(1+T_4p)=0$	K_1K_2 este suficient de mare $K_3 < \frac{1}{T_1}+$ $+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}$
3		$p\Pi(1+T_ip)+K_1[p^2T_5\times$ $\times(1+T_2p)\ (1+T_3p)+$ $+K_2K_3K_4(1+T_5p)]=0$ $(i=1,2,3,5)$ $T_5p^2(1+T_2p)(1+T_2p)+$ $+K_2K_3K_4(1+T_5p)=0$	K_1 suficient de mare, ecuația degenerată satisface criteriile lui Hurwitz.

Tabelul 6—2 (continuare)

Nr. crt.	Schema elementelor de bază și schema cu elementul de stabilizare cuplat	Ecuația caracteristică a sistemului cu elementul de stabilizare cuplat și ecuația degenerată	Condițiile de stabilitate
4	 	$pH(1+T_ip)+K_1K_2[T_5p^2\times$ $\times(1+T_3p)+K_3K_4\times$ $\times(1+T_5p)]=0$ $(i=1,2,3,5)$ $T_5p^2(1+T_3p)+$ $+K_3K_4(1+T_5p)=0$	K_1K_2 este suficient de mare $T_5 > T_3$

coeficienților de amplificare a două elemente de relaxare cu care se cuplează în paralel elementul de stabilizare trebue să fie suficient de mare.

Aceste concluzii se referă în întregime și la sistemele de transmitere a comenzilor ale căror scheme structurale sunt formate intr'un element de integrare și două sau trei elemente de relaxare.

6—4. CUPLAREA ELEMENTULUI DE STABILIZARE DE TIPUL GENERAL IN SISTEMUL COMPUS DIN N ELEMENTE DE RELAXARE

Se numește *element de stabilizare*, acel element a cărui legătură între funcția la ieșire și funcția la intrare poate fi exprimată printr'o fracție rațională în raport cu operatorul de derivare p:

$$\frac{x_e}{x_i} = \frac{a_0 p^{n_1} + a_1 p^{n_1-1} + \ldots + a_n}{b_0 p^{n_2} + b_1 p^{n_2-1} + \ldots + 1} = \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)} \qquad (6-21)$$

Necesitatea folosirii unui element de stabilizare cu funcția operațională (6—21) se datorează faptului că uneori este necesar a se cupla elementul de stabilizare în paralel cu o porțiune din circuit care conține mai mult de două elemente de relaxare. In aceste condiții, după cum s'a arătat mai sus [condiția (6—10)], cuplarea unui element din sistem, în paralel cu un element de stabilizare de tipul $\frac{Tp}{1+Tp}$ va conduce la un sistem nestabil. In cele ce urmează, vom stabili condițiile care trebue să fie satisfăcute de expresia operațională a elementului de stabilizare, în funcție de numărul elementelor de relaxare șuntate sau, ceeace este același lucru, în funcție de gradul ecuației părții din circuit care se șuntează cu elementul de stabilizare.

In fig. 6—10, este reprezentată schema structurală a sistemului de reglare analizat aici.

Până la elementul de ordinul ν, ecuația circuitului este:

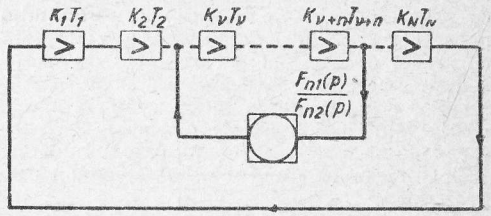


Fig. 6—10. Schema structurală.

$$\prod_{i=1}^{\nu}(1+T_ip)\,x_\nu = K_1K_2\ldots K_\nu\,x_0, \qquad (6-22)$$

dela elementul ν la elementul $(\nu+n)$ avem:

$$\prod_{j=\nu+1}^{\nu+n}(1+T_jp)\,x_{n+\nu} = K_{\nu+1}\ldots K_{\nu+n}\left(x_\nu - \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}\,x_{\nu+n}\right) \qquad (6-23)$$

și dela $\nu+n$ la N:

$$\prod_{\eta=\nu+n+1}^{N}(1+T_\eta p)\,x_N = K_{\nu+n+1}\ldots K_N\,x_{\nu+n}. \qquad (6-24)$$

Rezolvând sistemul (6—22) (6—23) și (6—24) (eliminând pe x_ν, $x_{\nu+n}$ și făcând $x_N = -x_0$), se obține:

$$m\prod_{i=1}^{N}(1+T_ip)\,F_{n_2}(p) + \prod_{j=1}^{\nu}(1+T_jp)\prod_{\eta=\nu+n+1}^{N}(1+T_\eta p)\,F_{n_1}(p) + K_1K_2\ldots K_\nu\,K_{\nu+n+1}\ldots K_N\,F_{n_2}(p) = 0, \qquad (6-25)$$

în care

$$m = \frac{1}{K_{\nu+1}K_{\nu+2}\ldots K_{\nu+n}}.$$

Să determinăm diferența $N_2 - N_1$ pentru acest caz; avem:

$$N_2 = N + n_2,$$

$$N_1 = \nu + N - \nu - n + n_1,$$

$$N_2 - N_1 = n_2 - n_1 + n.$$

Conform condiției (6—10), $N_2 - N_1 \leqslant 2$ și deci

$$n_2 - n_1 + n \leqslant 2. \qquad (6-26)$$

Condiția (6—26) dă posibilitatea de a se alege expresia operațională a elementului de stabilizare în funcție de cantitatea de elemente de relaxare șuntate cu acesta. In cazul de față, se obține rezultatul stabilit mai înainte dacă în expresia operațională a elementului de stabilizare, gradul numărătorului este egal cu gradul numitorului; în acest caz, numărul maxim de elemente care pot fi șuntate nu trebue să depășească două. Numărul elementelor șuntate poate fi majorat prin majorarea corespunzătoare a gradului numărătorului ecuației elementului de stabilizare. De exemplu, dacă numărul elementelor de stabilizare este 4, în baza relației (6—26), gradul numărătorului funcției operaționale a acestuia trebue să fie mai mare decât gradul numitorului cel puțin cu 4, întrucât pentru $n = 4$.

$$n_1 - n_2 \geqslant 4 - 2 = 2.$$

Cazuri particulare ale elementului de stabilizare de tipul general le constitue derivata și integrala. Intr'adevăr, dacă în (6—21) toți ceoficienții numărătorului, afară de a_{n-1}, sunt egali cu zero, iar la numitor există numai unitatea, atunci se obține expresia unei derivate. Dacă însă la numărător este numai unitatea și la numitor numai $b_{n-1}p$, se obține expresia unei integrale.

Concluziile rezultate din analiza sistemelor compuse din elemente de relaxare sau din elemente de relaxare și un element de integrare pot fi extinse la orice sistem. In acest caz, în locul numărului de elemente de relaxare, trebue considerat gradul ecuațiilor părții din schemă care este șuntată cu elementul de stabilizare. Volumul limitat al cărții nu ne dă posibilitatea de a analiza amănunțit o serie de cazuri. Deacea, vom da, fără demonstrație, unele concluzii, interesante în practică.

1. Dacă sistemul constă numai din elemente oscilatorii, elementul de stabilizare $\frac{Tp}{1+Tp}$ poate fi cuplat în paralel numai cu un element oscilatoriu sau un element oscilatoriu poate rămâne după ieșirea elementului de stabilizare, dacă acesta este de tipul derivată.

2. Dacă se șuntează n elemente oscilatorii, elementul de stabilizare trebue să fie de tipul general în care gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului cel puțin cu $2n - 2$.

3. Dacă sistemul are n elemente de integrare, $(n - 1)$ dintre ele trebue să fie șuntate cu elemente de stabilizare; în acest caz, fiecare dintre ele poate fi șuntat cu elementul de stabilizare cel mai simplu sau toate împreună cu un element de stabilizare de tipul general, respectând condiția (6—26).

4. In sistemele formate din toate tipurile de elemente, în primul rând trebue efectuate derivațiile indicate la punctul 3; în acest caz, dacă gradul acelei părți depinde de tipul elementelor din care este constituită această parte a schemei, gradul numărătorului ecuației elementului de stabilizare trebue să fie mai mare decât gradul numitorului ei cu $n - 2$.

6—5. DETERMINAREA LIMITELOR DE VARIAȚIE A VALORII FACTORULUI DE AMPLIFICARE AL ELEMENTELOR CUPLATE PRIN REACȚIE INVERSĂ

In paragrafele anterioare s'au făcut recomandări pentru întocmirea sistemelor de reglare automată, pornind dela faptul că factorii de amplificare ai unora dintre elemente au o valoare destul de mare.

Rezultatele obținute mai sus pot fi aplicate în mod practic pentru toți factorii de amplificare pentru care condițiile teoretice stabilite sunt satisfăcute.

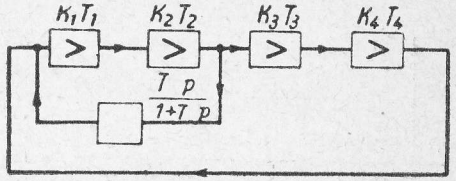


Fig. 6—11. Schema structurală.

Să rezolvăm problema pusă în următorul exemplu:

Sistemul de reglaj automat constă din patru elemente de relaxare cu constantele de timp

$$T_1 = 0{,}01 \text{ s}, \quad T_2 = 0{,}34 \text{ s}. \quad T_3 = 0{,}1 \text{ s}, \quad T_4 = 0{,}1 \text{ s}.$$

Se cere să se obțină stabilitatea sistemului, pentru un factor de amplificare foarte mare (teoretic oricât de mare). Pentru aceasta, se introduce în sistem un element de stabilizare cu funcția operațională $\frac{Tp}{1+Tp}$, care se cuplează în paralel cu primele două elemente de relaxare (fig. 6—11).

Schema din fig. 6—11 este analoagă cu schema N.4 din tabela 6—1.

După cum rezultă din tabela 6—1, ecuația caracteristică a acestei scheme este:

$$\prod_{i=1}^{4} (1 + T_i p)(1 + Tp) + K_1 K_2 [Tp (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_3 K_4 (1 + Tp)] = 0. \qquad (6-27)$$

Presupunem că parametrii ecuației degenerate, aleși în baza condițiilor de obținere a formei necesare a caracteristicii reale de frecvență, au valorile:

$$K_3 K_4 = 15; \quad T = 0{,}5.$$

Pentru ca sistemul să rămână stabil la un factor de amplificare oricât de mare, este necesar ca produsul K_1K_2 să fie suficient de mare.

Să construim împărțirea în D în raport cu K_1K_2.

Ecuația curbei limitei de împărțire în D în raport cu K_1K_2 se va scrie :

$$\overline{K_1K_2} = -\frac{(1+0{,}1\,j\omega)^2\,(1+0{,}34\,j\omega)\,(1+0{,}01\,j\omega)\,(1+0{,}5\,j\omega)}{0{,}5\,j\omega\,(1+0{,}1\,j\omega)^2+15\,(1+0{,}5\,j\omega)}.$$

In fig. 6—12, este reprezentată curba limitei împărțirii în D în raport cu parametrul K_1K_2. Limitele regiunii de stabilitate sunt date de punctele ab și c^{∞}. Este ușor de văzut că acestea constitue într'adevăr regiunea de stabilitate din (6 — 27), deoarece când $K_1K_2 = 0$, sistemul are toate rădăcinile reale și negative.

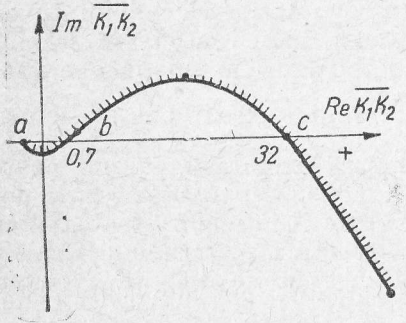


Fig. 6—12. Curba limitei împărțirii în D în raport cu K_1K_2.

Să examinăm proprietățile sistemului în cazul când K_1K_2 variază dela zero la ∞. In particular, când $K_1K_2=0$, sistemul este stabil ; el va rămâne stabil până când $K_1K_2 = 0{,}7$. Orice mărire a lui K_1K_2 peste această valoare, până la 32, face ca sistemul să devină nestabil.

Dacă $K_1K_2 \geqslant 32$, sistemul devine din nou stabil și rămâne astfel până la $K_1K_2 = \infty$.

Rezultă deci că 32 este limita inferioară a valorilor factorului de amplificare al elementelor șuntate cu elementul de stabilizare, pe care noi l-am obținut. Toate concluziile obținute în paragrafele anterioare vor fi valabile pentru

$$K_1K_2 > 32.$$

Este ușor a se formula regula pentru determinarea limitei inferioare a factorilor de amplificare a elementelor șuntate cu elementele de stabilizare, pentru obținerea sistemului care admite factori de amplificare oricât de mari. Pentru aceasta :

a) se construește schema structurală care satisface condițiile indicate în § 6—2 ;

b) se aleg parametrii ecuației degenerate în așa fel încât să se obțină regimul tranzitoriu optim ;

c) se trasează curba împărțirii în D în raport cu factorii de amplificare ai elementelor care se șuntează cu elementele de stabilizare și se determină limita inferioară de stabilitate ;

d) având limita inferioară de stabilitate, se alege valoarea factorilor de amplificare la care se obține valoarea cerută a preciziei.

Este necesar să ne mai oprim asupra unei chestiuni care are o mare importanță practică. Analizând comportarea sistemului la introducerea elementelor de stabilizare, s'au obținut regulile de cuplare a acestora pentru obținerea stabilității cu un factor de amplificare oricât mai mare. Astfel, s'a stabilit că la cuplarea elementelor de stabilizare cu funcția operațională $\frac{Tp}{1+Tp}$, numărul elementelor șuntate nu trebue să fie mai mare decât doi. Se pune problema dacă sistemul nu poate deveni nestabil din cauza parametrilor parazitari care pot fi cuprinși în elementul de stabilizare. Din analiza matematică detailată a acestei probleme s'a constatat că sistemul rămâne stabil la un factor de stabilizare oricât de mare dacă parametrii parazitari au valori mici.

In mod practic, după cum s'a văzut, factorii de amplificare au o anumită valoare finală și ca atare parametrii parazitari pot avea o valoare finală mică, nepericuloasă pentru stabilitatea sistemului.

Pentru determinarea cantitativă a influenței parametrilor parazitari, cuprinși în elementul de stabilizare, trebue să se țină seama de ei la construirea curbei de împărțire în D care determină limita factorului de amplificare dacă acești coeficienți au valori finite. In acest caz, factorii de amplificare ai elementelor care se șuntează cu elementul de stabilizare vor avea atât limită inferioară cât și limită superioară, însă în cazul valorilor mici ale parametrilor parazitari, limita superioară va fi din punct de vedere cantitativ atât de mare, încât și în acest caz, în mod practic, sistemul poate fi considerat stabil cu un factor de amplificare oricât de mare.

Să ilustrăm cele spuse, printr'un exemplu. Presupunem că în schema reprezentată în fig. 6—13, înafară de cele patru elemente, există și un element de relaxare (punctat). In acest

caz, elementul de stabilizare este cuplat astfel cum se indică în fig. 6—13. O asemenea schemă din principiu nu poate fi stabilă, oricât de mare ar fi factorul de amplificare, dacă constanta de timp a elementului nou introdus va avea o valoare finită. Considerăm constanta de timp a acestui element de 10 ori mai mică decât cea mai mică constantă de timp a elementelor de relaxare şuntate, adică egală cu 0,001 s.

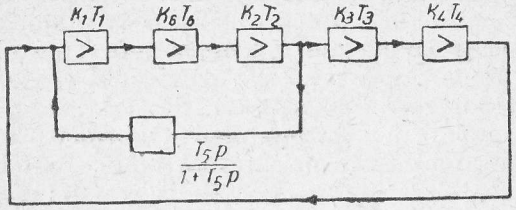


Fig. 6—13. Schema structurală.

Dacă vom ţine seama de acest element suplimentar, ecuaţia curbei limitei de împărţire în D în raport cu K_1K_2 se va scrie :

$$\overline{K_1K_2} = -\frac{(1+0{,}1\,j\omega)^2\,(1+0{,}01\,j\omega)\,(1+0{,}001\,j\omega)\,(1+0{,}5j\omega)\,(1+0{,}34\,j\omega)}{0{,}5\,j\omega\,(1+0{,}1\,j\omega)^2+15\,(1+0{,}5\,j\omega)}.$$

In fig. 6—14, este reprezentată curba limitei împărţirii în D, din care se vede că dacă se măreşte factorul de amplificare

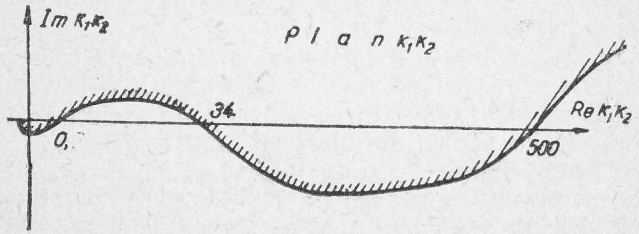


Fig. 6—14. Curba limitei împărţirii în D în raport cu K_1K_2.

dela zero până la infinit, regiunile de stabilitate şi nestabilitate alternează. In acest caz, în limitele $-0{,}2 < K_1K_2 < 0{,}7$, sistemul este stabil în limitele $0{,}7 < K_1K_2 < 34$, sistemul este nestabil. Mai departe, pentru $34 < K_1K_2 < 500$, sistemul este stabil şi pentru $K_1K_2 > 500$, sistemul este nestabil. Se vede

că, datorită existenţei parametrului parazitar cu constanta de timp finită, în cazul schemei 6—13, sistemul are un coeficient de amplificare final critic. Insă, după cum se vede din (6—14), limita superioară a produsului K_1K_2 la care sistemul este stabil este egală cu 500. In acest caz, factorul general de amplificare este $K = 500 \times 15 = 7\,500$. Dacă, în conformitate cu condiţiile tehnice, factorul de amplificare trebue să fie egal cu 600, în mod practic factorul de amplificare obţinut poate fi considerat destul de mare.

CAPITOLUL VII

EXEMPLE DE CALCUL AL SISTEMULUI DE REGLARE

In acest capitol, vom examina două exemple de sisteme de reglare automată a vitezei unui electromotor şi vom da un calcul detailat al parametrilor şi alegerea structurii sistemului de reglare.

Fie obiectul de reglare un motor de curent continuu cu excitaţie separată, de 1,5 kW şi tensiunea 120 V. Sarcina motorului nu depinde de viteza de rotaţie.

Conform condiţiilor de funcţionare, viteza motorului trebue să se menţină constantă, cu o precizie de minimum 0,12%; înafară de aceasta, sistemul trebue să permită variaţia vitezei în limite largi. Condiţiile tehnice suplimentare sunt : a) în procesul de stabilizare a vitezei date, suprareglarea nu trebue să depăşească 10 — 12%, perturbaţia fiind dată de un impuls unitar; b) timpul de reglare nu trebue să depăşească 0,6 s. Considerăm procesul de reglare terminat când viteza atinge 95% din valoarea dată.

7—1. ALEGEREA ELEMENTELOR DE BAZĂ ALE SISTEMULUI DE REGLARE

Pentru a se asigura posibilitatea de a varia viteza motorului în limite largi, se realizează reglarea prin acţionare asupra tensiunii indusului motorului la un flux constant al excitaţiei.

Ca sursă de tensiune pentru alimentarea indusului motorului se alege o amplidină (AMPL). Această alegere este impusă de caracteristicile AMPL, care au fost analizate amănunţit mai sus (factor mare de amplificare în intensitate şi putere, putere foarte mică la intrare etc.).

Ca element de măsurat se alege un generator tachimetric, a cărui forţă electromotoare se egalează cu o tensiune etalon. Intre elementul de măsurare şi amplidină se conectează un amplificator electronic. Necesitatea amplificatorului electronic rezultă din faptul că în conformitate cu condiţiile de precizie, sistemul trebue să aibă un factor de amplificare mare.

Sistemul de reglare, format din elementele principale indicate mai sus (fig. 7—1), funcţionează în felul următor. Diferenţa dintre forţa electromotoare e_t a generatorului tachimetric şi tensiunea etalon U_e se aplică la intrarea în amplificatorul electronic. Bobina de excitaţie a AMPL este alimentată de tensiunea de ieşire a amplificatorului. In regimul permanent, diferenţa $U_e - e_t$ creează, la intrarea în AMPL, o tensiune care asigură valoarea impusă a vitezei. Presupunând că prin modificarea sarcinii s'a modificat viteza, se va modifica şi forţa electromotoare e_t a generatorului tachimetric, respectiv diferenţa $U_e - e_t$. Aceasta din urmă va produce modificarea necesară a tensiunii în AMPL, ceeace asigură modificarea necesară a vitezei motorului.

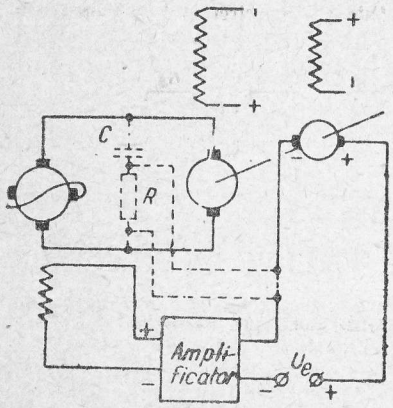


Fig. 7—1. Schema elementelor de bază.

7—2. SCHEMA STRUCTURALĂ A SISTEMULUI DE REGLARE

Să întocmim schema structurală a sistemului de reglare automată căutat. Conform ecuaţiei (1—13), ecuaţia motorului, la reglarea vitezei lui prin acţionare asupra tensiunii indusului la un flux constant şi în cazul unei perturbaţii, este :

$$(T_m\, T_r\, p^2 + T_m\, p + 1)\, E_m = K u_a. \qquad (7-1)$$

In funcţi de valorile constantelor de timp T_m şi T_r motorul poate fi reprezentat printr'un element de oscilaţie sau două elemente de relaxare legate în serie.

In cazul de faţă,

$$T_m = 0{,}5 \text{ s},$$
$$T_r = 0{,}01 \text{ s},$$
$$K = 1.$$

Se vede uşor că, în acest caz, motorul poate fi reprezentat prin unul sau două elemente de relaxare conectate în serie.

Intr'adevăr, rădăcinile părţii din stânga a ecuaţiei (7—1) vor fi :

$$\alpha_1 \approx -2$$
$$\alpha_2 \approx -98.$$

Vom nota cu T_3 şi T_4 constantele de timp respective ale elementelor de relaxare, care înlocuesc în schema structurală motorul reglat.

Rezultă :

$$T_3 = -\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ s},$$

$$T_4 = -\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{98} \approx 0{,}01 \text{ s}.$$

Considerăm amplidina compensată în întregime; în consecinţă, ea poate fi reprezentată prin două elemente de relaxare, conectate în serie cu constantele de timp T_1 şi T_2 şi factorii de amplificare K_1 şi K_2.

In exemplul analizat, constanta de timp a înfăşurării în scurtcircuit este $T_2 = 0{,}1$ s şi constanta de timp a circuitului de excitaţie a AMPL este $T_1 = 0{,}1$ s [1]). Factorul total de amplificare de tensiune a AMPL este $K_1 K_2 = 10$.

In fig. 7—2, este reprezentată schema structurală a sistemului care constă numai din elemente de bază. S'a obţinut un sistem cu un circuit format din patru

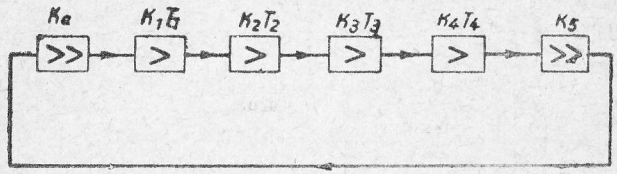


Fig. 7—2. Schema structurală a sistemului din fig. 7—1.

elemente de relaxare, conectate în serie. Ecuaţia caracteristică, obţinută prin înmulţirea funcţiilor operaţionale ale diverselor elemente, este :

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_a = 0,$$

în care K_5 este raportul dintre forţele electromotoare ale generatorului tachimetric şi motorului;

K_a — factorul de amplificare al amplificatorului electronic.

Din condiţiile de precizie, factorul general de amplificare este :

$$K = K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_a = \frac{1}{0{,}0012} \approx 800.$$

Inlocuind constantele de timp prin valorile lor şi luând factorul general de amplificare egal cu 800, se obţine :

$$0{,}00005\, p^4 + 0{,}0061\, p^3 + 0{,}117\, p^2 + 0{,}71\, p + 800 = 0.$$

Aplicând criteriul lui Routh-Hurwitz, se obţine :

$$a_1\, a_2\, a_3 - a_1^2\, a_4 - a_0\, a_3^2 > 0,$$

sau, înlocuind valorile constantelor, rezultă :

$$0{,}0061 \cdot 0{,}117 \cdot 0{,}71 - (0{,}0061)^2 \cdot 800 - 0{,}00005\ (0{,}71)^2 = -0{,}029398$$

şi deci, sistemul, pentru valorile date ale factorilor de amplificare, nu este stabil. Pentru stabilizarea sistemului, este necesar a se conecta în sistem un element

[1]) Inafară de parametrii bobinei de excitaţie, această constantă de timp, ţine seama şi de inerţia amplificatorului electronic.

stabilizator. Cel mai simplu element stabilizator, din punct de vedere al realizării tehnice, este acela care are ecuația operațională:

$$\frac{u_e}{u_i} = \frac{T_5 p}{1 + T_5 p}.$$

Conform rezultatelor obținute anterior, cu ajutorul unui asemenea element stabilizator, conectat în paralel cu două elemente de relaxare cu factori de amplificare suficient de mari, se poate obține un sistem care, în principiu, este stabil pentru un factor de amplificare oricât de mare.

Ca element stabilizator, se alege un lanț format dintr'o rezistență R și o capacitate C, care se conectează cum este indicat în schema din fig. 7—1 prin linia

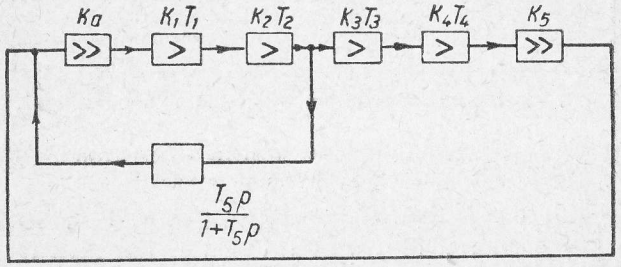


Fig. 7—3. Schema structurală.

punctată. La intrarea în elementul de stabilizare, se aplică tensiunea dată de AMPL, iar tensiunea de ieșire a elementului stabilizator se aplică la ieșirea amplificatorului electronic.

Schema structurală a sistemului complect de reglare este reprezentată în fig. 7—3. Elementul de stabilizare este cuplat în paralel cu primele două elemente de relaxare, cuplând și amplificatorul electronic. Această schemă este asemănătoare schemei nr. 4 din tabela 6—1 și, la o alegere corespunzătoare a parametrilor, ea poate rămâne stabilă pentru un coeficient de amplificre oricât de mare.

Să găsim ecuația caracteristică a sistemului. Porțiunea de circuit cuprinsă de elementul stabilizator este caracterizată prin ecuația:

$$u_a (1 + T_1 p)(1 + T_2 p) = K_1 K_2 K_a \left(Kn - \frac{T_5 p}{1 + T_5 p} u_a \right). \qquad (7-2)$$

Ecuația caracteristică a restului de circuit este:

$$(T_3 p + 1)(1 + T_4 p) n = K_3 K_4 K_5 u_a. \qquad (7-3)$$

Eliminând u_a din (7—2) și (8—3), se obține ecuația caracteristică a sistemului:

$$m (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)(1 + T_5 p) + T_5 p (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_3 K_4 K_5 (1 + T_5 p) = 0, \qquad (7-4)$$

în care

$$m = \frac{1}{K_1 K_2 K_3}.$$

Ecuația degenerată este:

$$T_5 p (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_3 K_4 K_5 K (1 + T_5 p) = 0, \qquad (7-5)$$

și, conform relației (7—9), ea trebue să satisfacă condițiile lui Routh-Hurwitz.

In ecuația (7—5), valorile date sunt $T_3 T_4$ și $K_3 K_4$. In ceeace privește constanta de timp T_5 a elementului de stabilizare și a factorului său de amplificare K_5, acestea trebue alese în așa fel încât să se obțină un sistem stabil și calitatea cerută a procesului de reglare.

Să alegem constanta de timp a elementului de stabilizare în așa fel, încât ecuația (7—5) să satisfacă condițiile de stabilitate pentru orice valori ale factorului de amplificare $K_3 K_4 K_5$. Aceasta va avea loc dacă inegalitatea:

$$T_5 > \frac{T_3 T_4}{T_3 + T_4} \qquad (7-6)$$

este satisfăcută. Să găsim condiția de stabilitate pentru ecuația (7—5). Deschizând parantezele ecuației (7—5), se obține:

$$T_5 T_3 T_4 p^3 + T_5 (T_3 + T_4) p^2 + T_5 p (1 + K_3 K_4 K_5 K) + K_3 K_4 K_5 = 0.$$

Condiția lui Routh-Hurwitz va fi:

$$\frac{(1 + K_3 K_4 K_5) T_5 (T_3 + T_4)}{T_3 T_4} - K_3 K_4 K_5 > 0. \qquad (7-7)$$

Inlocuind valoarea lui T_5 din (7—6) în (7—7), se obține:

$$\frac{(1 + K_3 K_4 K_5)(T_3 + T_4) T_3 T_4}{T_3 T_4 (T_3 + T_4)} - K_3 K_4 K_5 = 1 > 0.$$

Astfel, alegând valoarea constantei de timp a elementului de stabilizare din condiția (7—6), ecuația degenerată va satisface condițiile de stabilitate pentru orice valoare a factorului de amplificare.

In cazul nostru,

$$T_5 > \frac{T_3 T_4}{T_3 + T_4} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}01}{0{,}5 + 0{,}01} = \frac{0{,}005}{0{,}51} = 0{,}01$$

Alegem $T_5 = 0.2$ s.

A mai rămas să alegem factorul de amplificare $K_3 K_4 K_5$ și factorul de amplificare $K_1 K_2 K_a$.

Să alegem factorul de amplificare în raport cu tensiunea amplificatorului electronic

$$K_a = 20;$$

în acest caz,

$$K_1 K_2 K_a = 10 \cdot 20 = 200.$$

Se construește curba limitei împărțirii în D în raport cu factorul total de amplificare $K = K_1K_2K_3K_4K_5K_a$ și se separă regiunea de stabilitate; valoarea lui K trebue aleasă în această regiune, astfel încât să satisfacă pe de o parte condițiile de precizie, iar pe de altă parte cerințele de calitate formulate ca sarcină tehnică.

7—3. ALEGEREA FACTORULUI TOTAL DE AMPLIFICARE. EVALUAREA PREALABILĂ A PROCESULUI DE REGLARE

Să trasăm curba limitei împărțirii în D în raport cu factorul general de amplificare. Factorii de amplificare ai AMPL și amplificatorului electronic au fost aleși mai înainte și sunt egali:

$$K_1\ K_2\ K_a = 200.$$

Factorul total de amplificare este:

$$K = 200\ K_3K_4K_5.$$

Trasând curba limitei împărțirii în D în raport cu factorul total de amplificare, ținem seama de valoarea considerată $K_1\ K_2\ K_a = 200$.

Din (7—4), ecuația curbei limitei împărțirii în D în raport cu factorul general de amplificare poate fi scrisă:

$$\overline{K} = -\frac{(1 + 0{,}1j\omega)(1 + 0{,}1j\omega)(1 + 0{,}01j\omega)(1 + 0{,}5j\omega) + 200 \cdot 0{,}2j\omega(1 + 0{,}01j\omega)(1 + 0{,}5j\omega)}{1 + 0{,}2j\omega} =$$

$$= \frac{-0{,}0000022\omega^6 + 0{,}04463\omega^4 + 12{,}577\omega^2 - 1}{1 + 0{,}04} +$$

$$+ j\frac{0{,}000244\omega^5 - 3{,}9023\omega^3 - 40{,}71\omega}{1 + 0{,}04}. \qquad (7-8)$$

In fig. 7—4 este reprezentată curba limitei împărțirii în D, construită în baza ecuației 7—8. Regiunea valorilor factorului total de amplificare K_4 pentru care sistemul este stabil este însemnată cu ab. Valoarea maximă a factorului total de amplificare la care sistemul este stabil este $K = 5\,250$, deci mult mai mare decât valoarea factorului de amplificare necesar pentru asigurarea preciziei de reglare.

Conform condițiilor tehnice, factorul total de amplificare trebue să fie minimum 800; prin aceasta se determină limita inferioară a lui K.

Alegerea valorii factorului total de amplificare s'a efectuat pornind dela condițiile de obținere a vârfului minim de pe caracteristica reală de frecvență și a unei bande destul de mare de trecere a frecvențelor. In conformitate cu cele stabilite, valoarea lui K, foarte apropiată de valoarea optimă, va fi 1 000 și deci:

$$K_5 = \frac{1000}{200} = 5.$$

Să construim acum caracteristica reală de frecvență și să efectuăm o evaluare prealabilă a caracterului procesului. Folosind metoda dată în § 5—5, se construește caracteristica reală de frecvență. In fig. 7—5, este redată această caracteristică de frecvență din care rezultă următoarele:

1. Intersecția caracteristicii cu axa frecvențelor se produce la o frecvență:

$$\omega_c = 29\ s^{-1}.$$

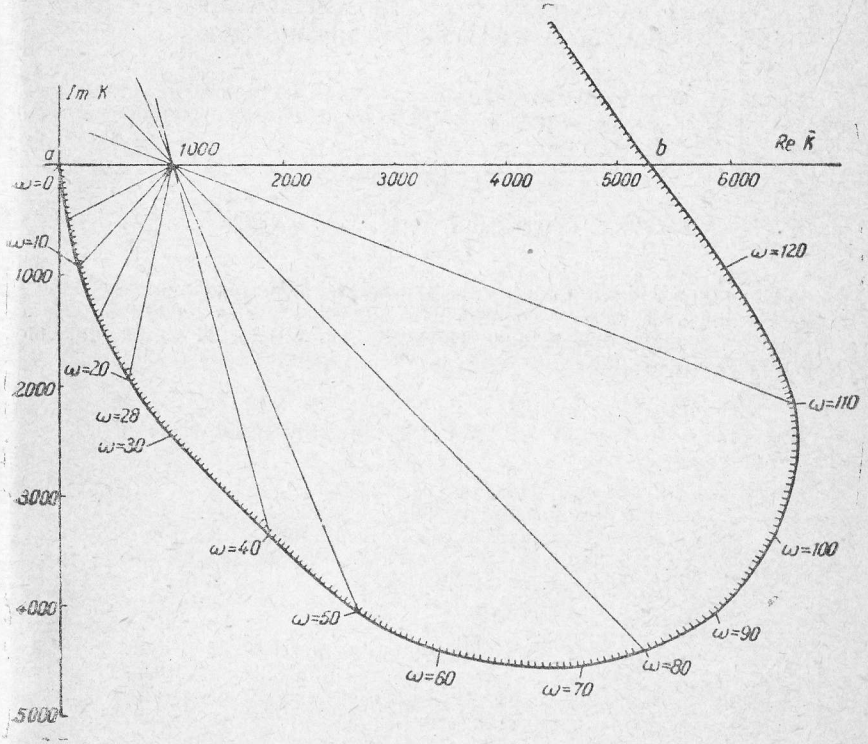


Fig. 7—4. Impărțirea în D, în raport cu factorii general de amplificare.

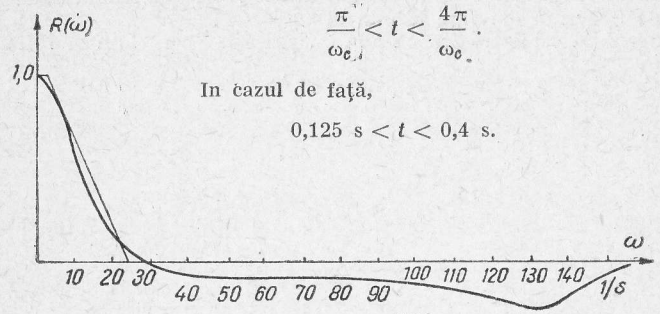
Conform § 5—4, durata de reglare este:

$$t > \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{3{,}14}{29} = 0{,}109\ s.$$

2. In regiunea negativă, caracteristica are un vârf a cărui valoare maximă este de circa 0,25, la o frecvență $\omega = 130\ s^{-1}$ și, conform § 5—4, partea negativă a caracteristicii nu trebue luată în considerație la evaluarea regimului tranzitoriu.

3. Să înlocuim caracteristica reală printr'un trapez (fig. 7—6); conform § 5—4, durata de reglare se va găsi între limitele :

$$\frac{\pi}{\omega_{c_1}} < t < \frac{4\pi}{\omega_{c_2}}.$$



In cazul de faţă,

$$0{,}125 \text{ s} < t < 0{,}4 \text{ s}.$$

Fig. 7—5. Caracteristica reală de frecvenţă.

4. Conform pct 2 din § 5—4, o nouă reglare va fi de maximum 18 %.

Astfel, după o evaluare prealabilă, sistemul satisface toate condiţiile tehnice. Toate aceste date ale fenomenului tranzitoriu se stabilesc direct cu ajutorul curbei de împărţiri în D din fig. 7—4, fără a se construi caracteristica reală.

7—4. CONSTRUIREA CURBEI FENOMENULUI TRANZITORIU

Pentru o verificare mai precisă a corespondenţei sistemului cu condiţiile date, vom trasa curba fenomenului tranzitoriu pentru exemplul dat. In acest scop, vom înlocui caracteristica reală de frecvenţă prin suma trapezelor (fig. 7—6). După cum se vede din această figură, în cazul de faţă caracteristica reală de frecvenţă poate fi înlocuită cu patru caracteristici trapezoidale de frecvenţă, cu parametrii :

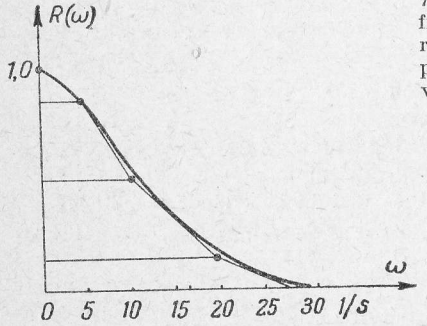


Fig. 7—6. Inlocuirea caracteristicii reale cu cele trapezoidale.

$$R_1(0) = 0{,}14, \quad \varkappa_1 = 0{,}74, \quad \omega_{c1} = 27,$$
$$R_2(0) = 0{,}46, \quad \varkappa_2 = 0{,}5, \quad \omega_{c2} = 20,$$
$$R_3(0) = 0{,}36, \quad \varkappa_3 = 0{,}5, \quad \omega_{c3} = 10,$$
$$R^4(0) = 0{,}14, \quad \varkappa_4 = 0, \quad \omega_{c4} = 5.$$

Pe baza tabelei date în anexă, se obţin valorile componentelor fenomenului tranzitoriu.

Rezultatele fenomenului tranzitoriu, pentru fiecare trapez, se centralizează într'o tabelă.

$x_1(t)$	t	$x_2(t)$	t	$x_3(t)$	t	$x_4(t)$	t
0	0	0	0	0	0	0	0
0,038	0,0165	0,086	0,025	0,086	0,05	0,0192	0,1
0,075	0,037	0,165	0,05	0,165	0,1	0,043	0,2
0,106	0,055	0,205	0,075	0,205	0,15	0,07	0,3
0,106	0,074	0,3	0,1	0,3	0,2	0,125	1,6
0,16	0,11	0,34	0,125	0,34	0,25		
0,165	0,13	0,52	0,2	0,36	0,3		
				0,52	0,4		

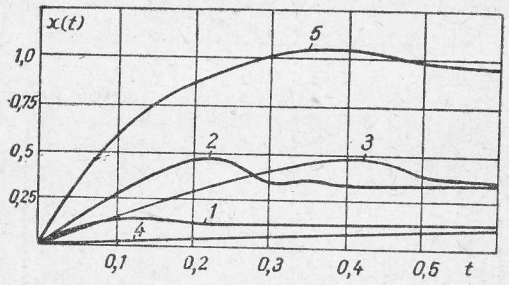


Fig. 7—7. Curbele fenomenului tranzitoriu.

In fig. 7—7, sunt date componentele izolate ale fenomenului tranzitoriu (notate cu cifrele 1, 2, 3, 4) şi fenomenul tranzitoriu rezultant (curba 5). Fenomenul se termină după 0,45 s şi suprareglarea este egală cu 6 %, adică sistemul satisface condiţiile tehnice impuse.

7—5. EXEMPLU DE ALEGERE A CONSTANTEI DE TIMP A ELEMENTULUI DE STABILIZARE

In al doilea exemplu, se ilustrează alegerea constantei de timp a elementului de stabilizare şi luarea în consideraţie a perturbaţiei.

Se analizează sistemul de reglare a vitezei motorului de curent continuu. Conform condiţiilor tehnice, statismul sistemului nu trebue să depăşească 0,7 %. Durata fenomenului tranzitoriu nu trebue să depăşească 0,8s. şi suprareglarea nu trebue să depăşească 10 %.

In fig. 7—8, este reprezentată schema elementului de bază a sistemului de reglare. Forţa electromotoare a generatorului tachimetric cuplat pe arborele motorului care se reglează se compară cu tensiunea etalon U_e. Diferenţa $U_e - e_t$

se aplică înfășurării de excitație a amplidinei (AMPL). Amplidina servește ca excitatrice a generatorului, a cărui tensiune se aplică indusului motorului reglat.

In regimul permanent, diferența

$$U_e - e_t$$

asigură, cu un anumit grad de precizie, viteza dată de rotație a motorului. La variația sarcinii, variază și viteza motorului, ceeace duce la variația lui e_t.

Aceasta va provoca variația diferenței $U_e - e_t$. Fenomenul tranzitoriu care ia naștere restabilește, cu o anumită precizie, viteza de rotație.

Indicăm datele mașinilor.

Constanta de timp a înfășurării de excitație a AMPL $T_1 = 0{,}05$ s.

Constanta de timp a periilor scurt circuitate $T_2 = 0{,}1$ s.

Constanta de timp a excitației generatorului $T_3 = 0{,}35$ s.

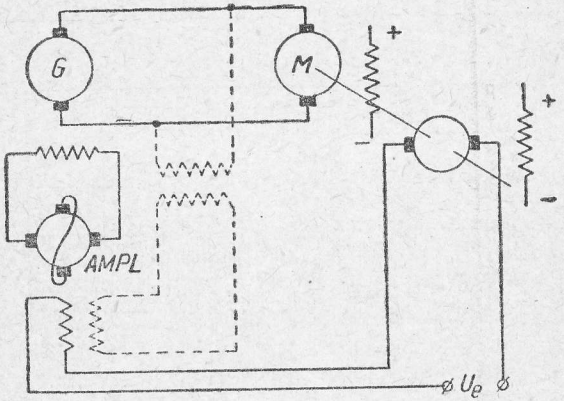


Fig. 7—8. Schema elementelor de bază ale sistemului de reglare a vitezei motorului.

Constanta de timp a circuitului indusului generatorului și a motorului $T_4 = 0{,}016$.

Constanta de timp electromecanică a motorului $T_m = 0{,}5$ s.

Factorul de amplificare în raport cu tensiunea amplidinei $K_1K_2 = 130$, factorul de amplificare pentru tensiunea generatorului $K_3 = 1{,}65$. Idem pentru motor, $K_4 = 1$. Raportul dintre forța electromotoare a generatorului tachimetric și forța electromotoare a motorului se va alege în raport cu condiția necesară pentru obținerea preciziei cerute de condițiile tehnice.

Să găsim ecuația diferențială de funcționare a sistemului.

Considerând amplidina complect compensată, ecuația acestuia se poate scrie :

$$(1 + T_1 p)\ (1 + T_2 p)\ U_a = K_1 K_2 (U_e - e_t), \qquad (7-9)$$

unde U_a este tensiunea la rotorul AMPL.

Ecuația generatorului este :

$$(1 + T_3 p) = K_3 U_a, \qquad (7-10)$$

și ecuația motorului este :

$$(1 + T_5 p + T_4 T_5 p^2) e_m = K_4 U_g, \qquad (7-11)$$

unde e_m este forța electromotoare a motorului :

$$e_t = K_5 e_m. \qquad (7-12)$$

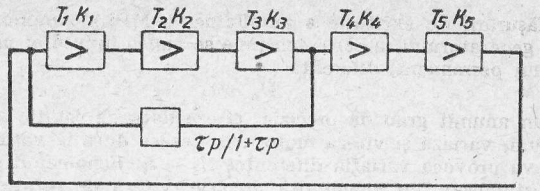


Fig. 7-9. Schema structurală pentru schema din fig. 7-8.

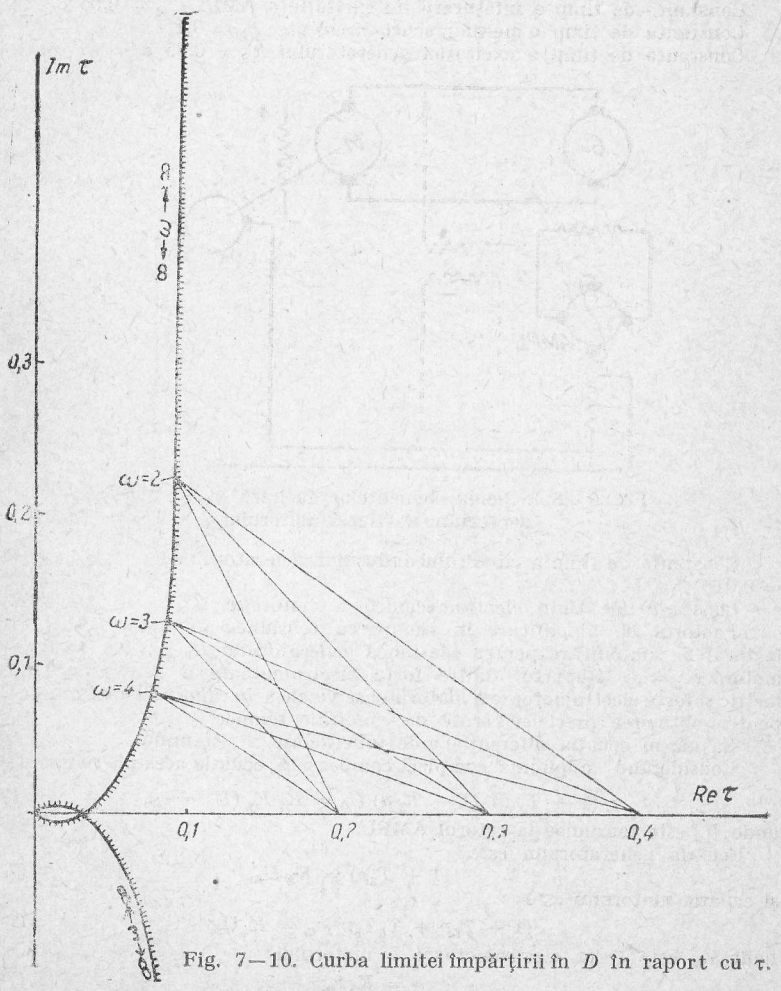


Fig. 7—10. Curba limitei împărțirii în D în raport cu τ.

Din ecuațiile (7—9), (7—10), (7—11) și (7—12) rezultă ecuația caracteristică a sistemului ,care se va scrie :

$$(1 + T_1 p)\ (1 + T_2 p)\ (1 + T_3 p)\ (1 + T_5 p + T_4 T_5 p^2) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 = 0.$$

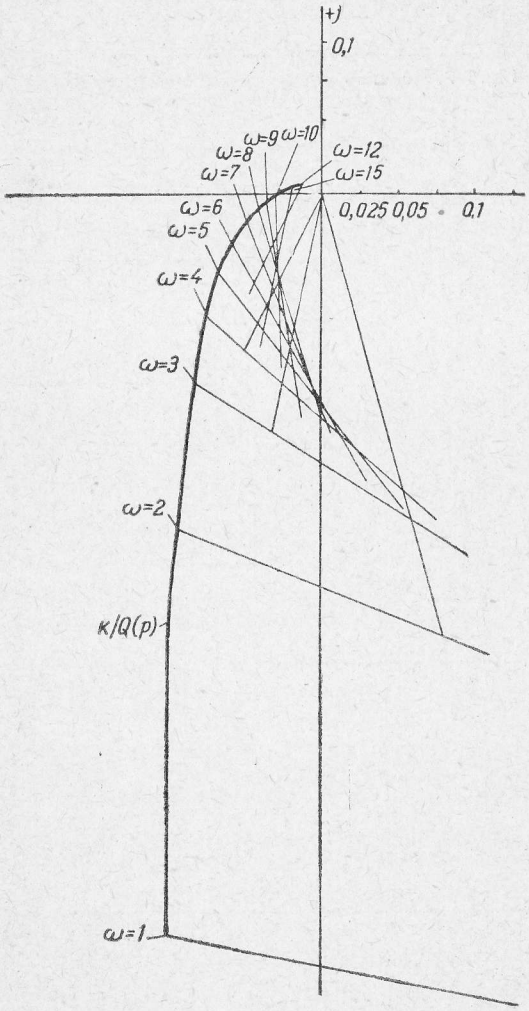


Fig. 7—11. Curba auxiliară.

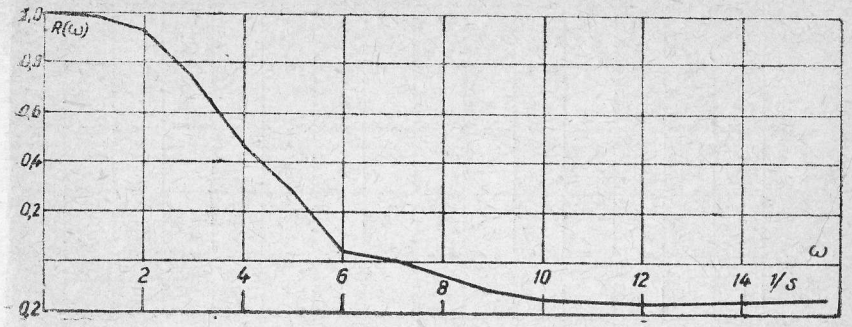


Fig. 7—12. Caracteristica reală de frecvență pentru $\tau = 0,2$.

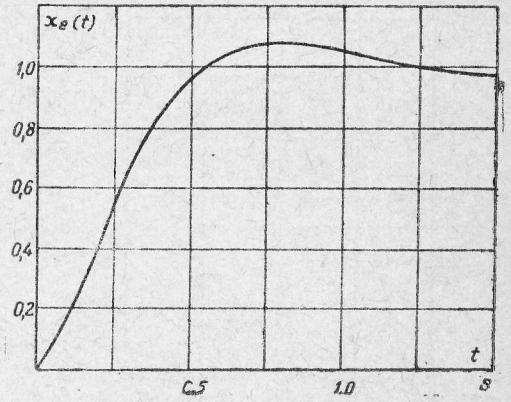


Fig. 7—13. Curba fenomenului tranzitoriu pentru $\tau = 0,2$.

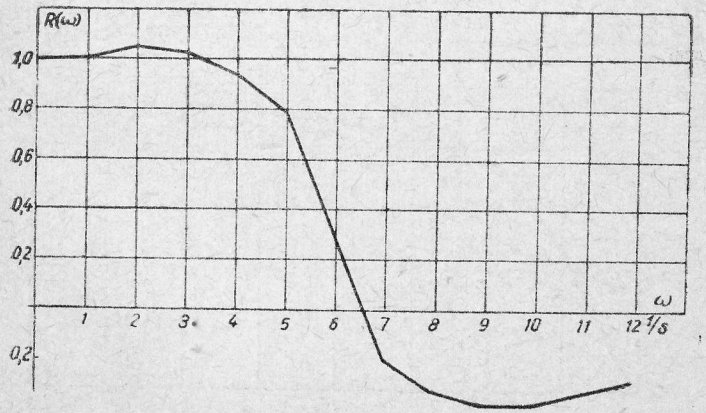


Fig. 7—14. Caracteristica reală de frecvență pentru $\tau = 0,1$.

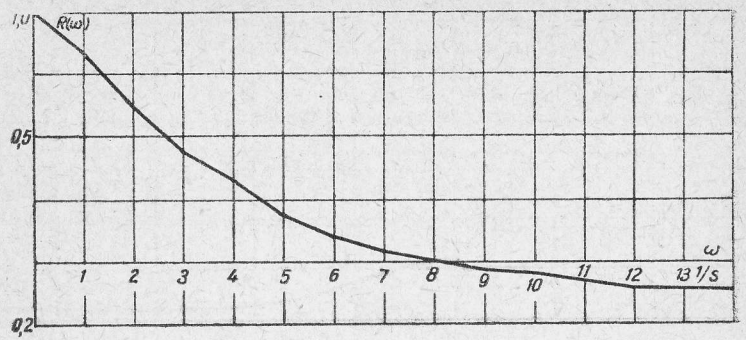


Fig. 7—15. Caracteristica reală de frecvență pentru $\tau = 0{,}4$

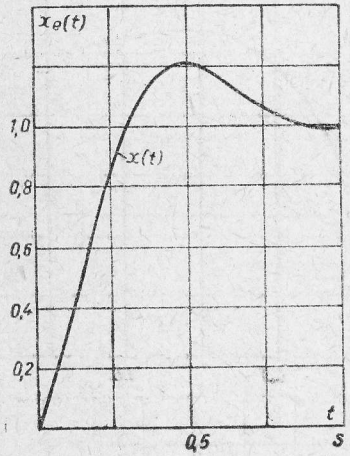


Fig. 7—16. Curba fenomenului tranzitoriu pentru $\tau = 0{,}1$.

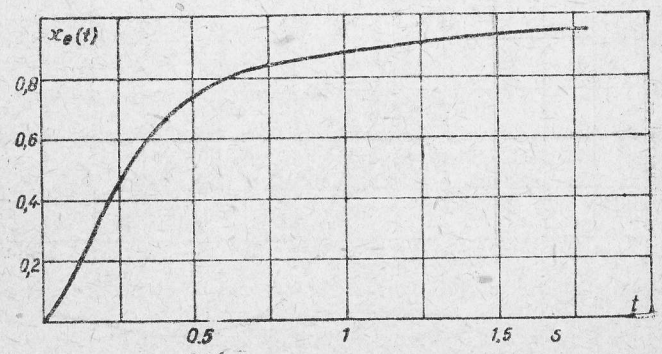


Fig. 7—17. Curba fenomenului tranzitoriu pentru $\tau = 0{,}4$.

Din condițiile de precizie, factorul total de amplificare trebue să fie cel puțin :

$$K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 = K > \frac{100}{0{,}7} = 142.$$

Având în vedere datele de mai sus, este ușor să ne convingem că fără introducerea unor dispozitive de stabilizare, sistemul nu este stabil.

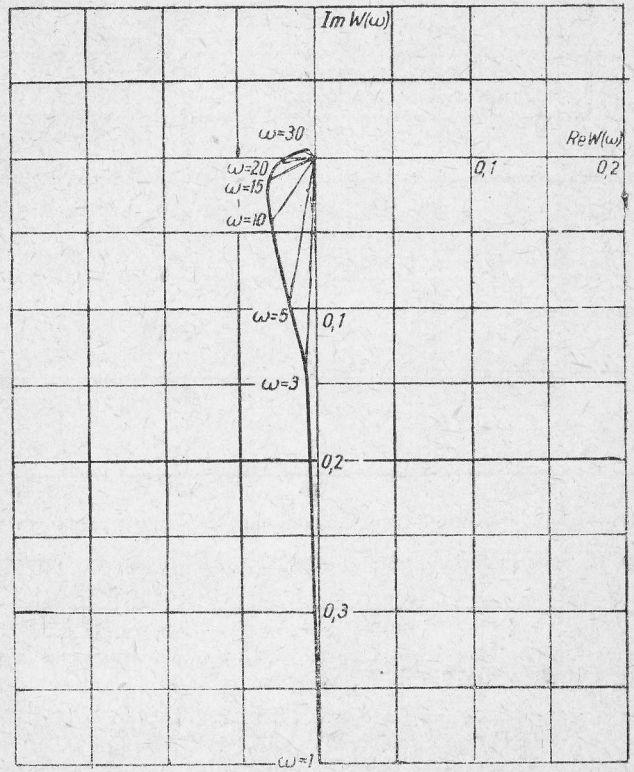


Fig. 7-18. Curba auxiliară la luarea în considerare a perturbației.

Ca element stabilizator vom alege un transformator, pe care-l vom conecta așa după cum este indicat cu linia punctată în fig. 7—8.

Funcția operațională a transformatorului, fără a ține seama de fluxurile de dispersiune, este de forma :

$$\frac{u_e}{u_i} = \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_2 p}.$$

Alegem datele înfășurării transformatorului în așa fel încât să avem aproximativ :

$$\tau_1 = \tau_2 \approx \tau$$

Ecuația caracteristică a sistemului cu elementul stabilizator introdus (schema structurală este dată în fig. 7—9) se va scrie:

$$(1 + T_1p)\ (1 + T_2p)\ (1 + T_3p)\ [T_4T_5p^2 + T_5p + 1]\ (1 + \tau p) +$$
$$+ K_1K_2K_3\ \tau p\ [T_4T_5p^2 + T_5p + 1] + K_1K_2K_3K_4K_5\ (1 + \tau p) = 0,$$

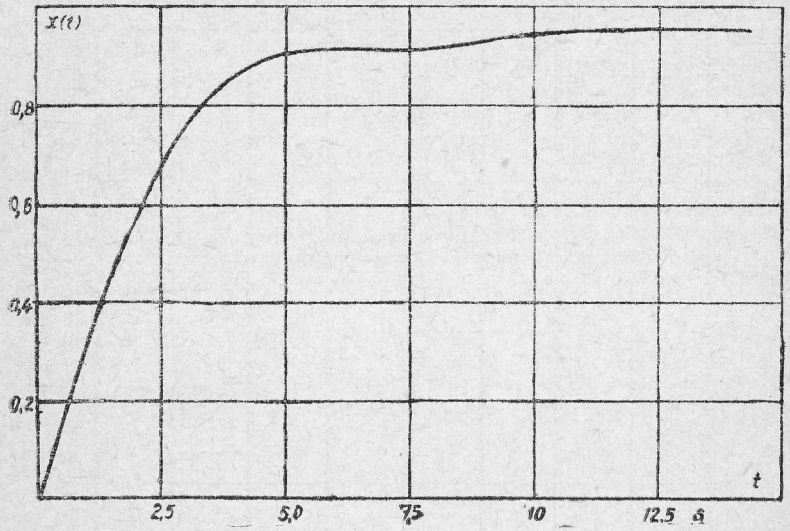


Fig. 7—19. Curba fenomenului tranzitoriu la luarea în considerare a perturbației.

de unde rezultă ecuația curbei limitei împărțirii în „D" în raport cu parametrul τ:

$$\overline{\tau} = -\frac{(1 + T_1j\omega)\ (1 + T_2j\omega)\ (1 + T_3j\omega)}{\omega\{(1 + T_1j\omega)\ (1 + T_2j\omega)\ (1 + T_3j\omega)\ [T_4T_5(j\omega)^2 + T_5j\omega +}$$

Trebue să mai stabilim ecuația curbei auxiliare. Ecuația caracteristicii amplitudine-fază a sistemului închis se va scrie:

$$K(j\omega) = \frac{K_1K_2K_3K_4}{(1 + T_1j\omega)\ (1 + T_2j\omega)\ (1 + T_3j\omega)\ [T_4\ T_5\ (j\omega)^2 + T_5j\omega +}$$

Să împărțim numărătorul și numitorul ecuației (7—14) cu numitorul ecuație (7 — 13); după transformări simple, se obține:

$$K(j\omega) = \frac{K_1K_2K_3K_4}{j\omega\{(1 + T_1j\omega)\ (1 + T_2j\omega)\ (1 + T_3j\omega)\ [T_4\ T_5\ (j\omega)^2 + T_5j\omega + 1]}$$
$$\tau + \frac{}{(1 + T_1j\omega)\ (1 + T_2j\omega)\ (1 + T_3j\omega)\ [T_4\ T_5}$$
$$j\omega\{(1 + T_1j\omega)\ (1 + T_2j\omega)\ (1 + T_3j\omega)\ [T_4\ T_5\ (j\omega)^2 + T_5j\omega + 1]$$

Numărătorul (7—15) este ecuația curbei auxiliare.

În fig. 7—10 și 7—11, sunt date limitele domeniului de stabilitate a împărțirii în D în raport cu τ și curba auxiliară. Factorul total de amplificare a fost ales pornind dela condițiile de asigurare a preciziei statice:

$$K_1\ K_2\ K_2\ K_4\ K_5 = 150.$$

Pentru construirea curbei auxiliare, ecuația ei a fost descompusă în partea care nu depinde de τ și partea în care este înmulțitor. Construind prima parte, la aceasta se adaugă pentru frecvențele corespunzătoare, vectorii părții a doua a ecuației; τ a fost luat în acest caz egal cu unitatea.

Pentru alte valori ale lui τ, se va schimba doar scara vectorilor obținuți.

Folosind proprietățile date mai sus ale curbei împărțirii în D și ale curbei auxiliare, este ușor de constatat că valoarea τ situată între limitele 0,2 ÷ 0,3 este apropiată de cea optimă. Alegem $\tau = 0,2$.

În fig. 7—12 este reprezentată caracteristica reală a frecvenței sistemului pentru $\tau = 0,2$, iar în fig. 7—13, curba fenomenului tranzitoriu. Pentru a se vedea cât de aproape este 0,2 de valoarea optimă, sunt date, în fig. 7—15 și 7—16, caracteristicile reale ale frecvenței și în fig. 7—17 și 7—18, fenomenele tranzitorii pentru $\tau = 0,1$ și $\tau = 0,4$.

După cum se vede din figurile de mai sus, când $\tau = 0,1$, sistemul are o reglare foarte mare, iar când $\tau = 0,4$, durata fenomenului tranzitoriu crește foarte mult. Când $\tau = 0,2$, sistemul satisface condițiile tehnice impuse.

Pentru a ilustra modul cum se ține seama de perturbații la calculul regimului tranzitoriu și influența perturbațiilor asupra naturii lor, presupunem că, înafară de perturbația unitară provocată de variația în salturi a sarcinii sistemului, se aplică o perturbație străină.

Presupunem că această perturbație suplimentară se aplică la intrarea în AMPL și poate fi reprezentată prin diferența a două funcții exponențiale:

$$A_1\ e^{-\alpha_1 t} - A_2\ e^{-\alpha_2 t}.$$

$$\frac{[T_4T_5(j\omega)^2 + T_5j\omega + 1] + K_1K_2K_3K_4K_5}{1] + K_1K_2K_3\ [T_4T_5(j\omega)^2 + T_5j\omega + 1] + K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5\ \}.} \qquad (7-13)$$

$$\frac{K_5\ (1 + \tau j\omega)}{1] + K_1K_2K_3\ [T_4T_5(j\omega)^2 + T_5j\omega + 1] + K_1K_2K_3K_4K_5(1 + \tau j\omega)} \qquad (7-14)$$

$$\frac{K_5\ (1 + \tau j\omega)}{+ K_1\ K_2\ K_3\ \ [T_4T_5\ (j\omega)^2 + T_5j\omega + 1] + K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5}$$
$$\frac{(j\omega)^2 + T_5\ j\omega + 1] + K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5}{+ K_1\ K_2\ K_3\ [T_4\ T_5\ (j\omega)^2 + T_5j\omega + 1] + K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5} \qquad (7-15)$$

Dacă se stabileşte ecuaţia curbei auxiliare ţinând seama de efectele perturbaţiei, la fel cum s'a procedat şi anterior, se obţine :

$$F(j\omega) = \frac{K_1K_2K_3K_4K_5\{[(1 + T_1j\omega)(1 + T_2j\omega)(1 + T_3j\omega) + K_1K_2}{j\omega\{[(1 + T_1j\omega)(1 + T_2j\omega)(1 + T_3j\omega) +}$$

$$\frac{K_3\tau j\omega][T_4\,T_5(j\omega)^2 + T_5\,j\omega + 1]\}\left(\frac{1}{\alpha_1 + j\omega} - \frac{1}{\alpha_2 + j\omega}\right)}{K_1K_2K_3][T_4\,T_5(j\omega)^2 + T_5(j\omega) + 1[+ K_1K_2K_3K_4K_5\}} \quad (7-16)$$

In fig. 7—18 este dată curba auxiliară construită din ecuaţia (7—16), pentru $\alpha_1 = 10$, $\alpha^3 = 20$ şi $A_1 = A_2 = 1$.

In fig. 7—19, este reprezentată curba fenomenului tranzitoriu pentru cazul când s'a ţinut seama de perturbaţia suplimentară. Din această curbă se vede că durata fenomenului tranzitoriu se prelungeşte considerabil, accelerația $\frac{dn}{dt}$ se micşorează foarte mult şi deci componenta dinamică a curentului motorului este redusă considerabil.

ANEXE

Tabelo

t \ x	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,138	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231
1,0	0,310	0,301	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,417	0,432	0,447
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,681	0,761	0,786	0,810
2,5	0,674	0,705	0,797	0,833	0,867	0,833	0,839	0,891	0,938	0,943
3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958	0,987	1,013	1,038
3,5	0,783	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095
4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,039	1,060	1,090	1,107	1,124
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,080	1,100	1,115	1,129
5,0	0,896	0,936	0,978	1,012	1,042	1,067	1,087	1,103	1,112	1,117
5,5	0,900	0,940	0,986	1,019	1,046	1,067	1,083	1,093	1,095	1,097
6,0	0,904	0,943	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062
6,5	0,904	0,942	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033
7,0	0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037	1,033	1,023	1,009
7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,025	1,025	1,017	1,005	0,989
8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021	1,012	0,995	0,981
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018	1,007	0,992	0,977
9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,025	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019	1,006	0,993	0,982
10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019	1,006	0,993	0,987
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017	1,005	0,993	0,991
11,0	0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014	1,002	0,933	0,991
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,999	0,991	0,989
12,0	0,950	0,988	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,987
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999	0,990	0,986	0,986
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,005	0,994	0,986	0,985	0,987

[1]) Extrasă din articolul lui V. V. Solodovnicov.

funcțiilor h

Anexă[1])

0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,562	0,575	0,593	0,603
0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
0,833	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,956	0,974	0,986	1,003	1,020
0,967	0,985	1,010	1,031	1,042	1,060	1,078	1,098	1,113	1,125	1,133
1,061	1,082	1,100	1,117	1,130	1,142	1,154	1,164	1,172	1,176	1,178
1,115	1,132	1,145	1,158	1,161	1,166	1,171	1,174	1,175	1,175	1,175
1,142	1,152	1,158	1,159	1,160	1,161	1,156	1,149	1,141	1,131	1,118
1,138	1,134	1,134	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053
1,118	1,115	1,107	1,098	1,084	1,069	1,053	1,037	1,019	1,001	0,986
1,092	1,083	1,070	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
1,051	1,037	1,021	1,003	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,920	0,906
1,018	1,001	0,982	0,946	0,948	0,936	0,920	0,910	0,903	0,903	0,905
0,993	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,908	0,909	0,915	0,925
0,974	0,958	0,944	0,926	0,922	0,911	0,920	0,927	0,934	0,946	0,958
0,966	0,951	0,941	0,935	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,004
0,966	0,949	0,944	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
0,970	0,960	0,961	0,966	0,976	0,990	1,006	1,023	1,039	1,053	1,061
0,975	0,972	0,980	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,066	1,066
0,982	0,985	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
0,987	0,996	1,007	1,017	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
0,993	1,002	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
0,997	1,006	1,017	1,029	1,037	1,043	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
0,997	1,006	1,019	1,026	1,025	1,027	1,015	1,000	1,984	0,969	0,958
0,997	1,006	1,018	1,019	1,017	1,010	0,995	0,979	0,965	0,954	0,949
0,997	1,006	1,014	1,012	1,005	0,993	0,980	0,964	0,955	0,950	0,955

Tabela

t \ x	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
13,5	0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,988
14,0	0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	0,997	0,988	0,983	0,985	0,991
14,5	0,954	,990	1,012	1,015	1,008	0,996	0,987	0,985	0,988	0,996
15,0	0 956	0 993	1,012	1,014	1,007	0,995	0,988	0,987	0,991	1,000
15,5	0,959	,995	1,014	1,014	1,006	0,995	0,989	0,988	0,996	1,004
16,0	0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991	0,992	0,998	1,007
16,5	0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993	0,905	1,002	1,009
17,0	0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994	0,997	1,005	1,010
17,5	0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994	0,998	1,006	1,010
18,0	0,966	1,002	1,015	1,011	1,002	0,995	0,995	1,001	1,008	1,010
18,5	0,966	1,001	1,015	1,009	1,001	0,994	0,995	1,001	1,007	1,009
19,0	0,967	1,000	1,015	1,008	0,998	0,992	0,995	1,001	1,006	1,006
19,5	0,967	1,000	1,014	1,006	0,996	0,991	0,995	1,001	1,005	1,004
20,0	0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995	1,001	1,005	1,002
20,5	0,968	1,002	1,012	1,004	0,994	0,991	0,996	1,002	1,004	1,001
21,0	0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997	1,003	1,004	1,001
21,5	0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999	1,004	1,004	1,000
22,0	0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000	1,005	1,004	0,999
22,5	0,973	1,002	1,011	1,002	0,996	0,995	1,002	1,006	1,004	0,999
23,0	0,974	1,005	1,011	1,002	0,996	0,996	1,004	1,007	1,003	0,998
23,5	0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,998	1,004	1,008	1,003	0,998
24,0	0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,999	1,005	1,007	1,002	0,997
24,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,006	1,001	0,997
25,0	0,975	1,005	1,008	1,000	0,995	0,999	1,005	1,004	1,000	0,996
25,5	0,975	1,005	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,003	0,998	0,996
26,0	0,975	1,005	1,007	0,999	0,995	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996

funcțiilor h — *continuare*

0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,998	1,006	1,010	1,005	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970
1,000	1,006	1,008	0,999	0,987	0,974	0,965	0,961	0,965	0,976	0,990
1,002	1,006	1,005	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
1,005	1,007	1,002	0,993	0,983	0,976	0,978	0,987	1,001	1,017	1,030
1,008	1,007	1,001	0,993	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,040
1,011	1,008	1,000	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,039	1,039
1,011	1,008	1,001	0,996	0,995	1,001	1,014	1,027	1,036	1,038	1,028
1,012	1,007	0,999	0,997	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,027	1,012
1,009	1,005	0,997	0,998	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,988
1,008	1,002	0,997	0,998	1,004	1,014	1,020	1,018	1,038	0,993	0,979
1,006	0,999	0,995	0,998	1,003	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969
1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	1,007	0,981	0,969	0,956
0,998	0,992	0,992	0,996	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
0,996	0,991	0,992	0,995	1,003	1,001	0,991	0,979	0,972	0,974	0,985
0,995	0,991	0,994	0,996	1,001	0,996	0,986	0,976	0,974	0,990	1,001
0,995	0,993	0,997	0,996	0,999	0,993	0,983	0,975	0,981	1,002	1,016
0,996	0,995	1,000	0,995	0,998	0,992	0,986	0,988	0,997	1,013	1,024
0,996	0,996	1,000	0,997	0,997	0,991	0,991	0,997	1,012	1,024	1,029
0,997	1,000	1,004	1,000	0,996	0,992	0,998	1,008	1,022	1,028	1,026
0,998	1,001	1,006	1,001	0,997	0,994	1,002	1,015	1,025	1,027	1,016
0,999	1,002	1,007	1,002	0,998	0,997	1,007	1,017	1,023	1,023	1,002
1,000	1,002	1,008	1,003	0,999	1,000	1,008	1,017	1,015	1,012	0,988
1,000	1,002	1,006	1,003	1,000	1,002	1,008	1,014	1,005	0,995	0,979
1,000	1,002	1,004	1,003	1,001	1,003	1,005	1,008	0,991	0,985	0,975
1,000	1,002	1,002	1,002	1,002	1,004	1,004	1,001	0,986	0,978	0,977
1,000	1,002	1,000	1,001	1,002	1,004	1,002	0,987	0,984	0,977	0,983

BIBLIOGRAFIE

1. *Eiserman M. A.*, Despre unele condiţii de structură a stabilităţii sistemelor de reglare automată. „Automatica i telemehanica", 1948, nr. 2.
2. *Herzenberg G. R.*, Despre o metodă de stabilizare a sistemelor de reglare automată. „Automatica i telemehanica", 1947, vol. 8, nr. 1.
3. *Goldfarb L. S.*, Regulatorii de tensiune electronici şi ionici. Electricestvo, 1941, nr. 2.
4. *Domanschi B. I.*, Introducere în automatizare şi telemecanică. Gosenergoizdat, 1950.
5. *Iosifian A. G., Cogan B. M., Seremetevschi N. N.*, Teoria sistemelor amplidinii autosincrone şi a sistemului sincron de urmărire. „Electricestvo", 1946, nr. 3.
6. *Cogan B. I.*, Rezultatele experimentale industriale a sistemului de reglare automată. „Automatica i telemehanica", 1940, nr. 5.
7. *Losievschi V. L.*, Regulatorii automaţi. „Oboronghiz", 1944.
8. *Marianovschi D. I.*, Stabilitatea sistemelor liniare de reglare automată, „Electricestvo", 1946, nr. 9.
9. *Meerov M. V.*, Probleme de stabilitate a reglării automate a generatorilor electrici. „Vestnic electropromişlenosti", 1943, nr. 9.
10. *Meerov M. V.*, Criteriile apriodicităţii reglării. Comunicările Secţiei de ştiinţe tehnice a Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., 1945, nr. 12.
11. *Meerov M. V.*, Sistemele reglării automate stabile pentru un factor de amplificare oricât de mare. „Automatica i telemehanica", 1947, nr. 4.
12. *Mihailov A. V.*, Metode analizei armonice în teroia reglării. „Automatica i telemehanica", 1938, nr. 3.
13. *Mihailov A. V.*, Teoria stabilităţii circuitelor liniare de reacţie cu constantele concentrate „J T F", 1939, nr. 1.
14. *Mihailov A. V.*, Criteriile aperiodicităţii sistemelor de autoreglare. „Automatica i telemehanica", 1941, nr. 1.
15. *Osmer A. A.*, Transmisiuni sincrone de forţă cu dispozitiv de repetare. „Vestnic electropromîşlenosti", 1946, nr. 9.
16. *Petrov B. N.*, Despre construirea şi transformarea schemelor structurale. „Analele Secţiei de ştiinţe tehnice a Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S.", 1945, nr. 12.
17. *Solodovnicov V. V.*, Despre o metodă aproximativă de analiză a dinamicii sistemelor de reglare automată a sistemelor de comandă. „Analele Secţiei de ştiinţe tehnice a Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., 1945, nr. 12.

18. *Solodovnicov V. V.*, Analiza calității sistemelor de comandă după caracteristicile lor amplitudine-fază, „Analele Secției de științe tehnice a Academiei de Științe a U.R.S.S., 1948, nr. 4.
19. *Tâpkin I. Z., Bromberg P. V.*, Despre gradul de stabilitate a sistemelor liniare. „Analele Secției de științe tehnice a Academiei de Științe a U.R.S.S., 1945, nr. 12.
20. *Dobrovolschi G. V.*, Fenomene tranzitorii în circuitele electrice. Academia de Științe a U.R.S.S., 1948.

TABLA DE MATERII

Pag.

Introducere 7
Capitolul I. **Elementele de bază ale sistemelor de reglare automată** . . 11
1—1. Obiectele de reglare. 11
1—2. Elementele de măsurare 19
1—3. Amplificatorii 31
1—4. Organele de reglare 35

Capitolul II. **Elementele tip și schemele structurale ale sistemelor de reglare automată** 35
2—1. Elementul de relaxare 36
2—2. Elementul oscilator 41
2—3. Elementul de integrare 46
2—4. Schemele structurale ale sistemelor de reglare automată . . 48
2—5. Statismul și precizia de reglare 51

Capitolul III. **Stabilitatea sistemelor de reglare automată** 56
3—1. Criteriile de stabilitate ale lui Routh-Hurwitz 59
3—2. Folosirea criteriului lui Routh-Hurwitz la studiul stabilității sistemelor de reglare 65
3—3. Criteriul amplitudine-fază 68
3—4. Exemple 74
3—5. Criteriile de stabilitate ale lui Mihailov 76
3—6. Criteriul de stabilitate generalizat (Împărțirea în „D", după I. I. Neumark) 81
3—7. Criteriul de stabilitate aperiodic 89
3—8. Curbele lui Vâșnegradschi 91

Capitolul IV. **Dispozitivele de stabilizare** 96
4—1. Reglarea tensiunii unui generator electric de curent continuu, cu ajutorul regulatorului de tensiune electrono-tiratronic . 96
4—2. Câteva proprietăți ale sistemelor cu un singur circuit . . 103
4—3. Exemple de stabilizare a sistemelor de reglare automată . 105
4—4. Câteva tipuri de elemente electrice de stabilizare 111
4—5. Exemplu de stabilizare a sistemului de transmitere a comenzilor. 115

Capitolul V. **Calitatea sistemelor de reglare automată** 119
5—1. Gradul de stabilitate. 120
5—2. Exemplu de utilizare a gradului de stabilitate. 124
5—3. Metoda frecvențelor. 126

Pag.

5—4. Determinarea proprietăților sistemului cu ajutorul caracteristicilor de frecvență 136
5—5. Metoda de construire a caracteristicilor de frecvență ale unui sistem închis de reglare automată 141
5—6. Aprecierea prealabilă a calității sistemului de reglare automată după limita împărțirii în „D" și alegerea factorului comun de amplificare a sistemului 143
5—7. Despre utilizarea limitei împărțirii în „D" în raport cu orice parametru τ, pentru evaluarea calității sistemului de autoreglare 146
5—8. Calculul aproximativ al procesului de reglare 154

Capitolul VI. **Principii de construire a sistemelor de reglare automată** . 158
6—1. Expunerea problemei 158
6—2. Sistemul de reglare automată compus din N elemente de relaxare și dintr'un element de stabilizare 162
6—3. Utilizarea elementelor de stabilizare în sistemele formate din trei și patru elemente de relaxare 165
6—4. Cuplarea elementului de stabilizare de tipul general în sistemul compus din N elemente de relaxare 174
6—5. Determinarea limitelor de variație a valorii factorului de amplificare al elementelor cuplate prin reacție inversă . . 177

Capitolul VII. **Exemple de calcul al sistemului de reglare** 181
7—1. Alegerea elementelor de bază ale sistemului de reglare . . 181
7—2. Schema structurală a sistemului de reglare 182
7—3. Alegerea factorului total de amplificare. Evaluarea prealabilă a procesului de reglare 186
7—4. Construirea curbei fenomenului tranzitoriu 188
7—5. Exemplu de alegere a constantei de timp a elementului de stabilizare 189

Anexă 199

Bibliografie 205

Redactor de carte: Prof. Ing. I. S. Antoniu
Tehnoredactor: Vasilescu C.
Corector: Ing. Mihalovici M.

Dat la cules 25.XII.1953. Bun de tipar 22.III.1954. Hârtie semivelină 65g/m² format 61×86/16. Coli editoriale 13,5. Coli tipografice 13. Prețul unui exemplar lei 10,60. Comanda 400 A. 06117/53. Pentru bibliotecile mari indicele de clasificare zecimală 621.313—52. Pentru bibliotecile mici 621.

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică 3, B-dul 6 Martie 29, București R. P. R.